Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazione di AM120

A.A. 2017 – 2018 - Esercitatore: Luca Battaglia

SOLUZIONI DELL'ESERCITAZIONE 1 – 2 DEL 6 – 7 MARZO 2018
ARGOMENTO: DERIVATE

1. Dimostrare, utilizzando la definizione di rapporto incrementale, che le seguenti funzioni sono derivabili per ogni $x \in \mathbb{R}$ e calcolarne la derivata:

   (a) $f(x) = a^x \quad (a > 0)$;
   Utilizzando le proprietà elementari dell'esponenziale otteniamo:

   $$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} a^x \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} a^x \log a,$$

   dove l'ultimo passaggio segue dal ben noto limite notevole $\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \log a$.

   (b) $f(x) = \sin x$;
   Utilizzando le formule di addizione e sottrazione otteniamo:

   $$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \\ &= \cos x, \end{aligned}$$

   dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato i ben noti limiti notevoli $\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ e $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$. Dunque $f'(x) = \cos x$.

   (c) $f(x) = \cos x$;
   Come nel caso precedente otteniamo

   $$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h} \\ &= -\sin x, \end{aligned}$$

   dunque $f'(x) = -\sin x$.

2. Calcolare, utilizzando la linearità della derivata e il primo punto del precedente esercizio, la derivata delle funzioni $\sinh x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ e $\cosh x := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

   Innanzi tutto, dall'ultimo punto del precedente esercizio con $a = \dfrac{1}{e}$, si ottiene che la derivata di $e^{-x} = \left(\dfrac{1}{e}\right)^x$ è uguale a $\left(\dfrac{1}{e}\right)^x \log \dfrac{1}{e} = -e^{-x}$. Dunque, dalla linearità della derivazione si ottiene

$$(\sinh x)' = \frac{1}{2}(e^x)' - \frac{1}{2}\left(e^{-x}\right)' = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} = \cosh x.$$

   Analogamente si ottiene

$$(\cosh x)' = \frac{1}{2}(e^x)' + \frac{1}{2}\left(e^{-x}\right)' = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} = \sinh x.$$

3. Calcolare, utilizzando la regola di derivazione del prodotto e il primo esercizio, la derivata delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x) = x^n \sin x \quad (n \in \mathbb{N})$;
   Poiché la derivata di $\sin x$ è data da $\cos x$, allora dalla regola di derivazione del prodotto otteniamo:

$$f'(x) = (x^n)' \sin x + x^n (\sin x)' = nx^{n-1} \sin x + x^n \cos x = x^{n-1}(n \sin x + x \cos x).$$

   (b) $g(x) = e^{cx} \log |x| \quad (c \in \mathbb{R})$;
   Scrivendo $e^{cx} = (e^c)^x$, la sua derivata sarà data da $(e^c)^x \cdot \log(e^c) = ce^{cx}$; dunque,

$$g'(x) = (e^{cx})' \log |x| + e^{cx} (\log |x|)' = ce^{cx} \log |x| + e^{cx} \frac{1}{x} = e^{cx} \left(c \log |x| + \frac{1}{x}\right).$$

   (c) $h(x) = e^{cx} \cos x \quad (c \in \mathbb{R})$.
   Ragionando come nei casi precedenti si ottiene:

$$h'(x) = (e^{cx})' \cos x + e^{cx} (\cos x)' = ce^{cx} \cos x + e^{cx}(-\sin x) = e^{cx}(c \cos x - \sin x).$$

4. Dimostrare che la derivata del prodotto di tre funzioni fgh è data da $f'gh + fg'h + fgh'$. Dedurne una simile regola per il prodotto di un numero arbitrario di funzioni $f_1 f_2 \ldots f_n$.
   Posta $F(x) = f(x)g(x)$, sarà sufficiente applicare la regola di Leibniz al prodotto $F(x)h(x) = f(x)g(x)h(x)$ e applicare nuovamente la regola per calcolare $F'(x)$:

$$(fgh)' = (Fh)' = F'h + Fh' = (f'g + fg')h + (fg)h' = f'gh + fg'h + fgh'.$$

   Per il secondo punto, può essere naturale pensare che la derivata del prodotto di n funzioni sia data dalla somma di n termini, in ciascuno dei quali solo un fattore viene derivato, ovvero:

$$(f_1 f_2 \ldots f_n)' = f_1' f_2 \ldots f_n + f_1 f_2' f_3 \ldots f_n + \cdots + f_1 \ldots f_{n-1} f_n'.$$

   Possiamo dimostrarlo formalmente procedendo per induzione: il caso $n = 2$ è la regola di Leibniz, dunque possiamo supporre che sia vero per $n-1$, cioè che la derivata di $F(x) = f_1(x) \ldots f_{n-1}(x)$ sia data da

$$F'(x) = f_1' f_2 \ldots f_{n-1} + f_1 f_2' f_3 \ldots f_{n-1} + \cdots + f_1 \ldots f_{n-1}';$$

a questo punto, calcolando con la regola di Leibniz la derivata di $F(x)f_n(x)$ si dimostra la formula anche per n:

$$\begin{aligned}(Ff_n)' &= F'f_n + Ff_n' \\ &= \left(f_1'f_2\dots f_{n-1} + f_1f_2'f_3\dots f_{n-1} + \dots + f_1\dots f_{n-1}'\right)f_n + f_1\dots f_{n-1}f_n' \\ &= f_1'f_2\dots f_n + f_1f_2'f_3\dots f_n + \dots + f_1\dots f_{n-1}f_n'.\end{aligned}$$

5. Dimostrare, utilizzando la regola di derivazione del quoziente, che le seguenti funzioni sono derivabili e calcolarne la derivata:

   (a) $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \qquad \left(x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{N}\right)$;
   Utilizzando la regola della derivata del rapporto e i risultati del primo esercizio, abbiamo

$$f'(x) = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

   (b) $f(x) = \cot x = \dfrac{1}{\tan x} \qquad (x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{N})$;
   Con la regola della derivata del reciproco si ottiene

$$f'(x) = -\frac{(\tan x)'}{\tan^2 x} = -\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

   (c) $f(x) = \tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} \qquad (x \in \mathbb{R})$; Con la regola della derivata del rapporto si ottiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\sinh x)'\cosh x - (\cosh x)'\sinh x}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh x^2} \\ &= \frac{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}-\left(e^{2x}-2-e^{-2x}\right)}{4}}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{1}{\cosh^2 x}.\end{aligned}$$

6. Sia $f : A \to B$ derivabile in $x_0 \in A$ e $g : B \to \mathbb{R}$ derivabile in $y_0 = f(x_0) \in B$.
   Dimostrare che la composizione $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ è derivabile in x_0 e la sua derivata vale

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0).$$

   Dedurne che, se f è invertibile e $g = f^{-1}$ è l'inversa di f, allora g è derivabile in ogni $y_0 = f(x_0)$ tali che $f'(x_0) \neq 0$ e vale $\left(f^{-1}\right)^{-1}(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

   Poniamo, per $y \in B$, $G(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} & y \neq y_0 \\ g'(y_0) & y = y_0 \end{cases}$. Essendo g derivabile nel punto y_0, G sarà continua in y_0 e dunque poiché $f(x_0 + h) \underset{h\to 0}{\to} y_0$, allora

$$\lim_{h\to 0} G(f(x_0 + h)) = G(\lim_{h\to 0} f(x_0 + h)) = G(y_0) = g'(y_0).$$

Quindi, dalla definizione di rapporto incrementale, otteniamo

$$\begin{aligned}(g\circ f)'(x_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{f(x_0+h)-f(x_0)}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}G(f(x_0+h))f'(x_0)\\ &= g'(y_0)f'(x_0).\end{aligned}$$

Infine, se $g = f^{-1}$, allora $x = (g\circ f)(x)$ per ogni x, dunque derivando i due membri dell'uguaglianza otteniamo

$$1 = (x)' = (g\circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x);$$

perciò, se $y_0 = f(x_0)$ e $f'(x_0)\neq 0$ otteniamo $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

7. Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ funzioni derivabili con $g(x)\neq 0$ per ogni $x\in I$. Dimostrare che le funzioni $F(x) := \log|f(x)|$ e $G(x) = e^{g(x)}$ sono derivabili e calcolarne la derivata.
   Calcolare infine la derivata di x^x per $x > 0$.
   Innanzi tutto, F è derivabile perché lo sono sia g che il logaritmo e $\log|f(x)|$ è sempre ben definito perché $f(x)$ non si annulla; per motivi simili è derivabile anche G.
   Dall'esercizio precedente otteniamo:

$$F'(x) = (\log|y|)'|_{y=f(x)}f'(x) = \frac{1}{f(x)}f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

   Analogamente,

$$G'(x) = (e^y)'|_{y=g(x)}g'(x) = e^{g(x)}g'(x).$$

   Infine, scrivendo $x^x = e^{\log(x^x)} = e^{x\log x}$, possiamo calcolarne la derivata usando il punto precedente:

$$(x^x)' = \left(e^{x\log x}\right)' = e^{x\log x}(x\log x)' = e^{x\log x}\left(\log x + x\frac{1}{x}\right) = x^x(\log x + 1).$$

8. Dimostrare, utilizzando la regola di derivazione dell'inversa, che le seguenti funzioni sono derivabili e calcolarne la derivata:

   (a) $f(x) = \arctan x \qquad (x\in\mathbb{R});$
   Posta $F(z) = \tan z$, allora $f = F^{-1}$, dunque dal precedente esercizio deduciamo che se $x = \arctan z$, allora

$$f'(x) = \frac{1}{F'(z)} = \frac{1}{1+\tan^2 z} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

   (b) $f(x) = \arcsin x \qquad (|x|<1);$
   Possiamo ragionare come nel caso precedente con $F(z) = \sin z$ e dunque

$$f'(x) = \frac{1}{F'(z)} = \frac{1}{\cos z} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 z}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

   Notare che in questo caso $-\dfrac{\pi}{2} < z < \dfrac{\pi}{2}$ e dunque $\cos z > 0$, dunque è stato possibile scegliere la radice quadrata positiva.

(c) $f(x) = \arccos x \qquad (|x| < 1)$.
Come nei casi precedenti, con $F(z) = \cos z$:

$$f'(x) = \frac{1}{F'(z)} = -\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 z}} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

9. Sia $f(x) = \begin{cases} x^\alpha & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ per $\alpha > 0$.
Dire, al variare di α, per quali x la funzione è derivabile e calcolarne la derivata $f'(x)$.

Per $x > 0$ si può utilizzare la derivazione della composizione di funzioni, scrivendo $f(x) = e^{\alpha \log x}$:

$$f'(x) = (e^y)'|_{y=\alpha\log x}(\alpha \log x)' = e^{\alpha \log x}\frac{\alpha}{x} = x^\alpha \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Dunque f è derivabile in ogni $x > 0$, indipendentemente da α.
Per la derivabilità in $x = 0$ è necessario applicare la definizione di limite di rapporto incrementale:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^a}{h} = \lim_{h\to 0} h^{-1};$$

quest'ultimo limite esiste (e vale 0) solo per $\alpha > 1$, dunque deduciamo che f è derivabile in 0 solo per $\alpha > 1$.

10. Sia $f(x) := \begin{cases} x(-\log x)^\beta & x \in (0,1) \\ 0 & x = 0,1 \end{cases}$.
Dire per quali valori di β la funzione è continua in $x = 0$ e/o in $x = 1$ e per quali è derivabile.

Poiché, per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, sappiamo che $\lim_{x\to 0} x(-\log x)^\beta = 0$, allora f è continua in 0 per ogni valore di β. Quanto alla derivabilità, applichiamo la definizione di limite del rapporto incrementale:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}(-\log h)^\beta.$$

Poiché $-\log h \underset{h\to 0}{\to} +\infty$, deduciamo che la funzione è derivabile solo per $\beta \leq 0$: se $\beta = 0$ abbiamo $f'(0) = 1$ mentre per $\beta < 0$ abbiamo $f'(0) = 0$.

In $x = 1$ invece abbiamo $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(-\log x)^\beta$. Poiché $-\log x \underset{x\to 1}{\to} 0$, questo limite varrà 0 se e solo se $\beta > 0$, e dunque questi sono gli unici valori per cui f è continua in 1.
Quanto alla derivabilità, abbiamo

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 1}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)(-\log(1+h))^\beta}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(-\log(1+h))^\beta}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(-\log(1+h))^\beta}{(-h)^\beta}\lim_{h\to 0}\frac{(-h)^\beta}{h} \\
&= -\lim_{h\to 0}(-h)^{\beta-1}.
\end{aligned}$$

Dunque, se $\beta < 1$ allora $f'(1)$ non esiste, se $\beta = 1$ abbiamo $f'(1) = -1$ e infine se $\beta > 1$ abbiamo $f'(1) = 0$.

11. Sia $f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.

Dire per quali x la funzione è derivabile e calcolarne la derivata $f'(x)$. Dire per quali x la derivata f' è continua.

Per $x \neq 0$ la funzione è chiaramente derivabile, in quanto composizione di funzioni derivabili; applicando le regole viste finora, otteniamo

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot -\frac{1}{x^2} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

f è anche derivabile in 0 perché il limite del rapporto incrementale vale

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right),$$

che vale 0 perché $0 \underset{n \to +\infty}{\leftarrow} -h \leq h \sin\left(\frac{1}{h}\right) \leq h \underset{h \to 0}{\rightarrow} 0$.Tuttavia, f' non è continua in 0 perché non esiste

$$\lim_{x \to 0} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right):$$

se $x = \frac{1}{2n\pi}$ con n intero, il limite è 1 mentre per $x = \frac{1}{(2n+1)\pi}$ è -1.