Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazione di AM120

A.A. 2017 – 2018 - Esercitatore: Luca Battaglia

Soluzioni dell'esercitazione 11 del 23 Aprile 2018
Argomento: Studio di funzione, formula di Taylor

1. Studiare graficamente la funzione $f(x) = \sqrt{x^3(x-5)^2}$, determinandone: insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi del dominio, eventuali asintoti, eventuali punti di discontinuità, di non derivabilità, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo o minimo, concavità e convessità, eventuali punti di flesso.

Per trovare il dominio di f sarà necessario imporre l'argomento della radice maggiore o uguale a zero: poiché quest'ultimo è $(x(x-5))^2 x$, f sarà definita per ogni $x \geq 0$. Essendo f una radice, sarà sempre maggiore o uguale di zero, e si annullerà negli zeri dell'argomento cioè $x = 0$ e $x = 5$ (che dunque saranno anche minimi assoluti).
Agli estremi del dominio abbiamo $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, dunque la funzione non ha asintoti verticali né orizzontali. Non ci sono neanche asintoti obliqui perché $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.
La funzione è continua su tutto il suo dominio, ed è sicuramente differenziabile in ogni $x \neq 0, 5$; in realtà è differenziabile anche in $x = 0$ perché

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^3(x-5)^2}}{x} = 5 \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^3}}{x} = 0.$$

In $x = 5$ invece f non è differenziabile perché

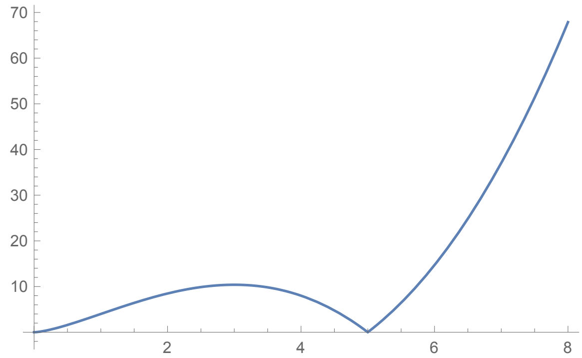
$$\lim_{x\to 5} \frac{f(x) - f(5)}{x-5} = \lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x^3(x-5)^2}}{x-5} = 5^{\frac{2}{3}} \lim_{x\to 5} \frac{|x-5|}{x-5}$$

non esiste. Per $x \neq 0, 5$ la derivata di f è $f'(x) = \frac{5}{2} \frac{x^4 - 8x^3 + 15x^2}{\sqrt{x^3(x-5)^2}}$: è positiva se $0 < x < 3$ oppure $x > 5$, e dunque f sarà crescente in questi intervalli, mentre negativa tra 3 e 5. $x = 3$ l'unico punto critico di f, ed è un massimo relativo ma non assoluto perché $\sup f = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
La derivata seconda di f è $f''(x) = \frac{15}{4} \frac{x^3 - 6x^2 + 5x}{\sqrt{x^3(x-5)^2}}$, che è positiva per $x \in (0, 1) \cup (5, +\infty)$, e dunque su questo intervallo la funzione è convessa, mentre su $(1, 5)$ è negativa; infine, $x = 1$ è l'unico zero di f'' e dunque è un flesso.

2. Determinare lo sviluppo di Taylor in $x = 0$ all'ordine 3 di $f(x) = x^2 - \sin(x)\log(1 + x)$ e calcolare il limite $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3}$.

Calcolando la derivata prima e seconda di $g(x) = \sin x$ e $h(x) = \log(1 + x)$ abbiamo

$$\begin{array}{lll} g(0) = 0 & g'(0) = \cos x|_{x=0} = 1 & g''(0) = -\sin x|_{x=0} = 0 \\ h(0) = 0 & h'(0) = \left.\frac{1}{1+x}\right|_{x=0} = 1 & h''(0) = -\left.\frac{1}{(1+x)^2}\right|_{x=0} = -1 \end{array},$$



da cui deduciamo gli sviluppi di Taylor

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x + o\left(x^2\right) \\ \log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) \end{aligned}$$

e quindi otteniamo

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - \left(x + o\left(x^2\right)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) \\ &= x^2 - \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + xo\left(x^2\right) + xo\left(x^2\right) - \frac{x^2}{2}o\left(x^2\right) + o\left(x^2\right)^2\right) \\ &= x^2 - \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right)\right) \\ &= \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right). \end{aligned}$$

Il limite varrà dunque

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2} + \frac{o\left(x^3\right)}{x^3}\right) = \frac{1}{2}.$$

3. Determinare lo sviluppo di Taylor in $x = 0$ delle funzioni $f(x) = e^x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = \sin x$.

Poiché vale $f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(k)}(x) = e^x = f(x)$ per ogni n, allora $f^{(k)}(0) = 1$ per ogni n e dunque abbiamo

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

Quanto a g, abbiamo

$$g'(x) = -\sin x \qquad g''(x) = -\cos x \qquad g'''(x) = \sin x \qquad g''''(x) = \cos x = g(x)$$

e dunque $g^{(4k+j)}(x) = g^{(j)}(x)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e $j = 1, 2, 3$. Calcolando in $x = 0$ otteniamo $g^{(2k+1)}(0) = 0$ e $g^{(2k)}(0) = (-1)^k$, dunque

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2n} + o\left(x^{2k}\right).$$

Le derivate di h verificano

$$h'(x) = \cos x \qquad h''(x) = -\sin x \qquad h'''(x) = -\cos x \qquad h''''(x) = \sin x = h(x)$$

e, come per g, vale $h^{(4k+j)}(x) = h^{(j)}(x)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e $j = 1, 2, 3$, dunque in $x = 0$ ho $g^{(2k+1)}(0) = 0$ e $g^{(2k)}(0) = (-1)^k$ e quindi

$$h(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2n+1} + o\left(x^{2k+1}\right).$$