

Soluzioni degli esercizi di Analisi Matematica I

A.A. 2016 – 2017 - Docente: Luca Battaglia

LEZIONE 7 DEL 10 NOVEMBRE 2016
ARGOMENTO: FORMULA DI TAYLOR

1. Determinare lo sviluppo di Taylor all'ordine 2 della funzione $f(x) = e^{2x} \cos(x) - \sin(2x)$ in $x_0 = 0$.

Utilizzando i seguenti sviluppi di Taylor al secondo ordine

$$\begin{aligned}e^{2x} &= 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + o((2x)^2) = 1 + 2x + 2x^2 + o(x^2) \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ \sin(2x) &= 2x + o((2x)^2)\end{aligned}$$

otteniamo

$$\begin{aligned}& e^{2x} \cos(x) - \sin(2x) \\ &= (1 + 2x + 2x^2 + o(x^2)) \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - (2x + o(x^2)) \\ &= 1 + 2x + 2x^2 + o(x^2) - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} (2x + 2x^2 + o(x^2)) + o(x^2) (1 + 2x + 2x^2 + o(x^2)) - 2x + o(x^2) \\ &= 1 + 2x + 2x^2 - \frac{x^2}{2} - 2x + o(x^2) \\ &= 1 + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2).\end{aligned}$$

Dunque la risposta esatta è (c).

2. Determinare lo sviluppo di Taylor all'ordine 2 della funzione $f(x) = \arctan(x+1)$ in $x_0 = 0$.
Poiché le derivate di $f(x)$ valgono

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (x+1)^2} \qquad f''(x) = -\frac{2(x+1)}{(1 + (x+1)^2)^2},$$

allora dalla definizione di sviluppo di Taylor abbiamo

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2) = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4},$$

e la risposta esatta è (b).

3. Determinare lo sviluppo di Taylor all'ordine 2 della funzione $f(x) = \sqrt{1+x+x^2}$ in $x_0 = 0$.
Dallo sviluppo di Taylor

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + o(y^2)$$

otteniamo

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x+x^2} &= 1 + \frac{x+x^2}{2} - \frac{(x+x^2)^2}{8} + o((x+x^2)^2) \\ &= 1 + \frac{x+x^2}{2} - \frac{x^2+2x^3+x^4}{8} + o(x^2) \\ &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)\end{aligned}$$

e la risposta esatta è (c).

4. Determinare lo sviluppo di Taylor all'ordine 3 della funzione $f(x) = \log(1+x^2) - (\log(1+x))^2$ in $x_0 = 0$.

Dallo sviluppo di Taylor

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

otteniamo

$$\begin{aligned}\log(1+x^2) - (\log(1+x))^2 &= x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) - \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 \\ &= x^2 + o(x^2) - \left(x^2 + \frac{x^4}{4} + (o(x^2))^2 - x^3 + 2xo(x^2) - x^2o(x^2)\right) \\ &= x^2 + o(x^2) - (x^2 - x^3 + o(x^2)) \\ &= x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

e la risposta esatta è (c).

5. Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(x) - \log(1+2x)}{x^2}$.

Utilizzando gli sviluppi di Taylor

$$\begin{aligned}\sin(x) &= x + o(x^2) \\ \log(1+2x) &= 2x - \frac{(2x)^2}{2} + o((2x)^2) = 2x - 2x^2 + o(x^2)\end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(x) - \log(1+2x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(x + o(x^2)) - (2x - 2x^2 + o(x^2))}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2x + 2x^2 + o(x^2)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 + \frac{o(x^2)}{x^2}\right) \\ &= 2.\end{aligned}$$

La risposta esatta dunque è (d).

6. Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^{-\frac{x}{2}} - \cos \sqrt{x}}$.

Dagli sviluppi di Taylor

$$\begin{aligned}e^{-\frac{x}{2}} &= 1 + \left(-\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{2}\right)^2 + o\left(\left(-\frac{x}{2}\right)^2\right) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2) \\ \cos \sqrt{x} &= 1 - \frac{(\sqrt{x})^2}{2} + \frac{(\sqrt{x})^4}{24} + o((\sqrt{x})^4) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^2)\end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^{-\frac{x}{2}} - \cos \sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2) - (1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^2))} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{x^2}{8} + o(x^2) - \frac{x^2}{24} + o(x^2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{8} + \frac{o(x^2)}{x^2} - \frac{1}{24} + \frac{o(x^2)}{x^2}} \\
 &= 12
 \end{aligned}$$

e la risposta esatta è (d).

7. Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \tan(x) - \sqrt{1+x^2}}{\sin(x) - x \cos(x)}$.

Grazie agli sviluppi

$$\begin{aligned}
 e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\
 \tan(x) &= x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\
 \sqrt{1+x^2} &= 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3) \\
 \sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\
 \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)
 \end{aligned}$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \tan(x) - \sqrt{1+x^2}}{\sin(x) - x \cos(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - (x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)) - (1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3))}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{-\frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3}}{-\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{o(x^3)}{x^3}} \\
 &= -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

e la risposta esatta è (b).

8. Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin(x^2)} - \frac{1}{(\tan(x))^2} \right)$.

Riscrivendo il limite come $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan(x))^2 - \sin(x^2)}{\sin(x^2)(\tan(x))^2}$ possiamo applicare gli sviluppi asintotici

$$\begin{aligned}
 (\tan(x))^2 &= (x + o(x))^2 \\
 &= \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)^2 \\
 &= x^2 + x \left(\frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) + \frac{x^3}{3} x + \frac{x^3}{3} \left(\frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) + o(x^3) \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) \\
 &= x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) \\
 \sin(x^2) &= x^2 + o(x^2) = x^2 + o(x^4)
 \end{aligned}$$

e si ottiene

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin(x^2)} - \frac{1}{(\tan(x))^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) - (x^2 + o(x^4))}{(x^2 + o(x^2))(x + o(x))^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3}x^4 + o(x^4)}{(x^2 + o(x^2))^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} \\
 &= \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

e la risposta esatta è (d).

9. Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{1}{1-x}}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}$.
Dagli sviluppi di Taylor

$$\begin{aligned}
 e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\
 \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + o(x^2) \\
 \sqrt{1+x^2} &= 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\
 \sqrt{1-x^2} &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)
 \end{aligned}$$

segue che

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{1}{1-x}}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - (1 + x + x^2 + o(x^2))}{1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} \\
 &= -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

e la risposta esatta è (a).

10. Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 2^{\sin(x)} - 3^{\tan(x)} + \cos(x^2)}{\arctan(x^2)}$.
Dati gli sviluppi di Taylor

$$\begin{aligned}
 6^x &= 1 + \log(6)x + \frac{(\log(6))^2}{2}x^2 + o(x^2) \\
 2^{\sin(x)} &= 1 + \log(2)\sin(x) + \frac{(\log(2))^2}{2}(\sin(x))^2 + o((\sin(x))^2) \\
 &= 1 + \log(2)(x + o(x^2)) + \frac{(\log(2))^2}{2}(x + o(x))^2 + o((o(x))^2) \\
 &= 1 + \log(2)x + \frac{(\log(2))^2}{2}x^2 + o(x^2) \\
 3^{\tan(x)} &= 1 + \log(3)\tan(x) + \frac{(\log(3))^2}{2}(\tan(x))^2 + o((\tan(x))^2) \\
 &= 1 + \log(3)(x + o(x^2)) + \frac{(\log(3))^2}{2}(x + o(x))^2 + o((o(x))^2) \\
 &= 1 + \log(3)x + \frac{(\log(3))^2}{2}x^2 + o(x^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(x^2) &= 1 + o(x^2) \\ \arctan(x^2) &= x^2 + o(x^2)\end{aligned}$$

otteniamo

$$\begin{aligned}& \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 2^{\sin(x)} - 3^{\tan(x)} + \cos(x^2)}{\arctan(x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \log(6)x + \frac{(\log(6))^2}{2}x^2 + o(x^2) - \left(1 + \log(2)x + \frac{(\log(2))^2}{2}x^2 + o(x^2)\right)}{x^2 + o(x^2)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\left(1 + \log(3)x + \frac{(\log(3))^2}{2}x^2 + o(x^2)\right) + 1 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(\log(6))^2 - (\log(2))^2 - (\log(3))^2}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} \\ &= \frac{(\log(6))^2 - (\log(2))^2 - (\log(3))^2}{2} \\ &= \log(2)\log(3)\end{aligned}$$

e la risposta esatta è (b).

11. Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(x)} - e^{\arctan(x)}}{x \log(\cos(x))}$.

Utilizzando gli sviluppi

$$\begin{aligned}e^{\sin(x)} &= 1 + \sin(x) + \frac{(\sin(x))^2}{2} + \frac{(\sin(x))^3}{6} + o((\sin(x))^3) \\ &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{(x + o(x^2))^2}{2} + \frac{(x + o(x))^3}{6} + o(x^3) \\ &= 1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) + \frac{x^2 + o(x^3)}{2} + \frac{x^3 + o(x^3)}{6} + o(x^3) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3) \\ e^{\arctan(x)} &= 1 + \arctan(x) + \frac{(\arctan(x))^2}{2} + \frac{(\arctan(x))^3}{6} + o((\arctan(x))^3) \\ &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) + \frac{(x + o(x^2))^2}{2} + \frac{(x + o(x))^3}{6} + o(x^3) \\ &= 1 + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) + \frac{x^2 + o(x^3)}{2} + \frac{x^3 + o(x^3)}{6} + o(x^3) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ \log(\cos(x)) &= \cos(x) - 1 + o(\cos(x) - 1) \\ &= -\frac{x^2}{2} + o(x^2) + o(o(x^2)) \\ &= -\frac{x^2}{2} + o(x^2)\end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(x)} - e^{\arctan(x)}}{x \log(\cos(x))} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)}{-\frac{x^2}{2} + o(x^3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{-\frac{x^3}{2} + o(x^3)}\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{3},$$

dunque la risposta esatta è (b).

12. Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left((1 - e^{-x})^2 - x^2\right) \sin\left(\frac{2}{x}\right)}{\sin(2x)}$.

Utilizzando gli sviluppi

$$\begin{aligned}\sin(2x) &= 2x + o(x) \\ (1 - e^{-x})^2 - x^2 &= (1 - (1 - x + o(x)))^2 - x^2 = (x + o(x))^2 - x^2 = o(x^2)\end{aligned}$$

otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left((1 - e^{-x})^2 - x^2\right) \sin\left(\frac{2}{x}\right)}{\sin(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^2) \sin\left(\frac{2}{x}\right)}{2x + o(x)} = \frac{o(x) \sin\left(\frac{2}{x}\right)}{2 + o(1)} = o(x) \sin\left(\frac{2}{x}\right).$$

Poiché, per definizione di o piccolo, $\lim_{x \rightarrow 0} o(x) = 0$ e inoltre $-1 \leq \sin\left(\frac{2}{x}\right) \leq 1$, allora dal teorema dei carabinieri il limite è 0 e la risposta esatta è dunque (a).