Sapienza - Università di Roma - Corso di Laurea in Ingegneria Elettrotecnica

Soluzione degli esercizi di Analisi Matematica I

A.A. 2016 – 2017 - Docente: Luca Battaglia

Lezione 4 del 20 Ottobre 2016
Argomento: Limiti, successioni

Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\sqrt{\cos(x)}}{x^2}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\sqrt{\cos(x)}}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos(x)}}{x^2}\\ &= 1+\lim_{x\to 0}\frac{1-(\cos(x))^{\frac{1}{2}}}{\cos(x)-1}\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos(x)-1}{x^2}\\ &= 1-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}-\frac{(1+(\cos(x)-1))^{\frac{1}{2}}-1}{\cos(x)-1}\\ &= 1-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{5}{4},\end{aligned}$$

dove abbiamo usato i limiti notevoli $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ e $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{(1+y)^a-1}{y}=a$ con $a=\dfrac{1}{2}$.
Dunque la risposta esatta è la (c).

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\pi e^x)}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi e^x)}{x}=\lim_{x\to 0}-\frac{\sin(\pi(e^x-1))}{x}=-\pi\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi(e^x-1))}{\pi(e^x-1)}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=-\pi,$$

dove abbiamo usato la proprietà fondamentale del seno $\sin(\pi+y)=-\sin(y)$ e i limiti $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin(y)}{y}=1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$.
Dunque, la risposta esatta è la (a).

3. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin(x)\cos(x))^{x+\frac{1}{x}}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(1-\sin(x)\cos(x))^{x+\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0}\left((1-\sin(x)\cos(x))^{\frac{1}{-\sin(x)\cos(x)}}\right)^{-\sin(x)\cos(x)\left(x+\frac{1}{x}\right)}\\ &= \lim_{x\to 0}e^{-\sin(x)\cos(x)\left(x+\frac{1}{x}\right)}\\ &= e^{-\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\lim_{x\to 0}\cos(x)\lim_{x\to 0}\left(x^2+1\right)}\\ &= \frac{1}{e},\end{aligned}$$

dove abbiamo usato il limite notevole $\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e$.

La risposta esatta è dunque la (b).

4. $\lim_{x\to e} \dfrac{(x-e)\log(\log(x))}{1-\cos(x-e)}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to e} \frac{(x-e)\log(\log(x))}{1-\cos(x-e)} &= \lim_{x\to e} \frac{(x-e)\log\left(\log\left(1+\frac{x-e}{e}\right)+1\right)}{1-\cos(x-e)} \\
&= \lim_{x\to e} \frac{1}{e}\frac{\frac{\log\left(\log\left(1+\frac{x-e}{e}\right)+1\right)}{\frac{x-e}{e}}}{\frac{1-\cos(x-e)}{(x-e)^2}} \\
&= \frac{1}{e}\lim_{x\to e} \frac{\frac{\log\left(\log\left(1+\frac{x-e}{e}\right)+1\right)}{\log\left(1+\frac{x-e}{e}\right)}\frac{\log\left(1+\frac{x-e}{e}\right)}{\frac{x-e}{e}}}{\frac{1-\cos(x-e)}{(x-e)^2}} \\
&= \frac{1}{e}\frac{\lim_{x\to e}\frac{\log\left(\log\left(1+\frac{x-e}{e}\right)+1\right)}{\log\left(1+\frac{x-e}{e}\right)}\lim_{x\to e}\frac{\log\left(1+\frac{x-e}{e}\right)}{\frac{x-e}{e}}}{\lim_{x\to e}\frac{1-\cos(x-e)}{(x-e)^2}} \\
&= \frac{2}{e},
\end{aligned}$$

dove sono stati usati i limiti notevoli $\lim_{y\to 0}\dfrac{\log(1+y)}{y} = 1$ e $\lim_{y\to 0}\dfrac{1-\cos(y)}{y^2} = \dfrac{1}{2}$.

La risposta esatta è dunque la (a).

5. $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n+5}{n+7}\right)^{3n}$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+5}{n+7}\right)^{3n} &= \lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{2}{n+7}\right)^{3n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\left(1-\frac{2}{n+7}\right)^{\frac{n+7}{2}}\right)^{\frac{-6n}{n+7}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{-6n}{n+7}} \\
&= \frac{1}{e^6},
\end{aligned}$$

dunque la risposta esatta è la (a).

6. $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\log\left(n^2+3n+1\right)-2\log(n)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)+\tan\left(\frac{2}{n^2}\right)}$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(n^2+3n+1\right)-2\log(n)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)+\tan\left(\frac{2}{n^2}\right)} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{3n+1}{n^2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)+\tan\left(\frac{2}{n^2}\right)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{3n+1}{n^2}\right)}{\frac{3n+1}{n^2}} \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3n+1}{n^2}}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)+\tan\left(\frac{2}{n^2}\right)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3n+1}{n^2}}{\frac{1}{n}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}+\frac{2}{n^2}\frac{\tan\left(\frac{2}{n^2}\right)}{\frac{2}{n^2}}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3n+1}{n^2}}{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{3n+1}{n+2} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} \\
&= 3,
\end{aligned}
$$

dunque la risposta esatta è (d).

7. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\log(n)} e^{\sin(n)}$

Poiché $\displaystyle\frac{1}{e}\frac{\sqrt[3]{n}}{\log(n)} \le \frac{\sqrt[3]{n}}{\log(n)} e^{\sin(n)} \le e\frac{\sqrt[3]{n}}{\log(n)}$ e $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e}\frac{\sqrt[3]{n}}{\log(n)} = \lim_{n\to+\infty} e\frac{\sqrt[3]{n}}{\log(n)} = +\infty$, dal teorema dei carabinieri concludiamo che il limite è zero e la risposta esatta è (c).

8. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{n!}+n^{-n}\right)}{1-\cos\left(3^{-n}\right)}$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{n!}+n^{-n}\right)}{1-\cos\left(3^{-n}\right)} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{n!}+n^{-n}\right)}{\frac{1}{n!}+n^{-n}} \lim_{n\to+\infty} \frac{9^{-n}}{1-\cos\left(3^{-n}\right)} \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n!}+n^{-n}}{9^{-n}} \\
&= 2\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n!}+n^{-n}}{9^{-n}} \\
&= 2\lim_{n\to+\infty} \frac{9^n}{n!}+\frac{9^n}{n^n} \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

dove abbiamo usato il limite notevole $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$.
Dunque, la risposta esatta è (a).

9. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+e^n)}{n+2\sqrt{n}+3}$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+e^n)}{n+2\sqrt{n}+3} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+\log(1+e^{-n})}{n+2\sqrt{n}+3} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+2\sqrt{n}+3} + \frac{\log(1+e^{-n})}{n+2\sqrt{n}+3} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+2\sqrt{n}+3} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{\sqrt{n}}+3} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

La risposta esatta è (b).

10. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{\log(n)}{\log\left(n^2+e^{-n}\right)}$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{\log(n)}{\log\left(n^2+e^{-n}\right)} &= \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{\log(n)}{2\log\left(\sqrt{n^2+e^{-n}}\right)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \left(\frac{\log\left(\sqrt{n^2+e^{-n}}\right)}{2\log\left(\sqrt{n^2+e^{-n}}\right)} - \frac{\log\left(\sqrt{1+\frac{e^{-n}}{n^2}}\right)}{2\log\left(\sqrt{n^2+e^{-n}}\right)} \right)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}(-1)^n.$$

Questo limite tuttavia non esiste, perché vale $\frac{1}{2}$ per n pari e $-\frac{1}{2}$ per n dispari. Dunque, la risposta esatta è (d).

11. $\lim_{n\to+\infty} n^4\left(\sqrt{1+\frac{2}{n^4}}-1\right)$

$$\lim_{n\to+\infty} n^4\left(\sqrt{1+\frac{2}{n^4}}-1\right) = \lim_{n\to+\infty} n^4\frac{1+\frac{2}{n^4}-1}{\sqrt{1+\frac{2}{n^4}}+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} = 1.$$

La risposta esatta è (b).

12. $\lim_{n\to+\infty}\frac{\log\left(2^n+e^n+2n^5\right)}{\log\left(3^n+n^5\right)}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log\left(2^n+e^n+2n^5\right)}{\log\left(3^n+n^5\right)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1+\log\left(\left(\frac{2}{e}\right)^n+1+2\frac{n^5}{e^n}\right)}{\log 3+\log\left(1+\frac{n^5}{3^n}\right)} = \frac{1}{\log 3}$$

La risposta esatta è (c).

13. $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3}{2n+\sqrt{n^2+1}}\sin\left(e^{\frac{1}{n^2+n}}-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3}{2n+\sqrt{n^2+1}}\sin\left(e^{\frac{1}{n^2+n}}-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n^3}{2n+\sqrt{n^2+1}}}{n^2}\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(e^{\frac{1}{n^2+n}}-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\frac{1}{n^2}}\\
&= \frac{1}{3}\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(e^{\frac{1}{n^2+n}}-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{e^{\frac{1}{n^2+n}}-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{n^2+n}}-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}}\\
&= \frac{1}{3}\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{n^2+n}}-1}{\frac{1}{n^2}}+\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}}\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{n^2+n}}-1}{\frac{1}{n^2+n}}\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n^2+n}}{\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

La risposta esatta è (b).

14. $(-1)^{n+1}\lim_{n\to+\infty}\frac{\log((n+3)!)-\log(n!)}{n}$

$$\lim_{n\to+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\log((n+3)!)-\log(n!)}{n} = \lim_{n\to+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\log\left(\frac{(n+3)!}{n!}\right)}{n}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\log((n+3)(n+2)(n+1))}{n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{\log(n+3)}{n} + \frac{\log(n+2)}{n} + \frac{\log(n+1)}{n} \right) \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

dove abbiamo usato la proprietà fondamentale del fattoriale $(n+3)! = (n+3)(n+2)! = (n+3)(n+2)(n+1)! = (n+3)(n+2)(n+1)n!$.
Dunque la risposta esatta è (a).

15. $\lim_{n\to+\infty} \left(2^{1+\frac{1}{n}} - 3^{\frac{1}{n}}\right)^n$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \left(2^{1+\frac{1}{n}} - 3^{\frac{1}{n}}\right)^n &= \lim_{n\to+\infty} \left(\left(1 + \left(2^{1+\frac{1}{n}} - 3^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \right)^{\frac{1}{2^{1+\frac{1}{n}} - 3^{\frac{1}{n}} - 1}} \right)^{n\left(2^{1+\frac{1}{n}} - 3^{\frac{1}{n}} - 1\right)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} e^{n\left(2^{1+\frac{1}{n}} - 3^{\frac{1}{n}} - 1\right)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} e^{2n\left(2^{\frac{1}{n}} - 1\right) - n\left(3^{\frac{1}{n}} - 1\right)} \\
&= e^{2\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} - \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}} \\
&= e^{2\log 2 - \log 3} \\
&= \frac{4}{3},
\end{aligned}
$$

dove è stato usato il limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log(a)$ per $a = 2, 3$.
Dunque la risposta esatta è (d).