Sapienza - Università di Roma - Corso di Laurea in Ingegneria Elettrotecnica

Soluzioni degli esercizi di Analisi Matematica I

A.A. 2016 – 2017 - Docente: Luca Battaglia

Lezione 1 del 29 Settembre 2016
Argomento: Disequazioni, funzioni

1. Risolvere la disequazione: $(x-1)\left(x^2+5\right) \geq x^3+1$

   Sviluppando il prodotto a sinistra otteniamo

   $$x^3 - x^2 + 5x - 5 \geq x^3 + 1,$$

   che equivale a

   $$-x^2 + 5x - 6 \geq 0,$$

   ovvero

   $$x^2 - 5x + 6 \leq 0.$$

   Poiché le radici del polinomio $x^2 - 5x + 6$ sono $x = 2$ e $x = 3$, la disequazione equivale a

   $$(x-2)(x-3) \leq 0.$$

   I singoli fattori hanno i seguenti segni:

	$x < 2$	$2 < x < 3$	$x > 3$
$x-2$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$(x-2)(x-3)$	$+$	$-$	$+$

   Dunque, la disequazione è verificata per $2 \leq x \leq 3$.

2. Risolvere la disequazione: $e^{2x} > 2 + 3e^{-2x}$

   Portando tutti gli addendi a sinistra e raggruppando un fattore comune otteniamo

   $$e^{-2x}\left(e^{4x} - 2e^{2x} - 3\right) > 0.$$

   Poiché il fattore e^{-2x} è sempre positivo, possiamo limitarci a studiare l'altro fattore. Quest'ultimo, attraverso la sostituzione $y = e^{2x}$, equivale al polinomio $y^2 - 2y - 3$, che ha per radici $y = -1$ e $y = 3$.
   Dunque, possiamo riscrivere la disequazione come

   $$e^{-2x}\left(e^{2x} + 1\right)\left(e^{2x} - 3\right) > 0.$$

   A questo punto, anche il secondo fattore è positivo e dunque basterà studiare la positività di $e^{2x} - 3$. Quest'ultima è verificata per $x > \frac{\log 3}{2}$, dunque la disequazione è soddisfatta per $x > \frac{\log 3}{2}$.

3. Risolvere la disequazione: $\sin(x)\left(2\sin(x)^2+\cos(x)-2\right)>0$

Innanzi tutto, essendo tutte le quantità periodiche di periodo 2π, basterà studiare la disequazione per $0 \leq x < 2\pi$.
Dall'identità $\sin(x)^2+\cos(x)^2=1$, riscriviamo l'equazione come

$$\sin(x)\left(\cos(x)-2\cos(x)^2\right)>0,$$

che a sua volta si può fattorizzare come

$$\sin(x)\cos(x)(1-2\cos(x))>0.$$

I segni dei fattori sono:

	$0<x<\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}<x<\pi$	$\pi<x<\frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{2}\pi<x<\frac{5}{3}\pi$	$\frac{5}{3}\pi<x<2\pi$
$\sin(x)$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
$\cos x$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
$1-2\cos x$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$
$\sin(x)\cos(x)(1-2\cos(x))$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Le soluzioni sono dunque $\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2}$, $\pi<x<\frac{\pi}{2}$ e $\frac{5}{3}\pi<x<2\pi$ (e, più in generale, $\left(2k+\frac{1}{3}\right)<x<\left(2k+\frac{1}{2}\right)$, $(2k+1)\pi<x<\left(2k+\frac{3}{2}\right)\pi$ e $\left(2k+\frac{5}{3}\right)\pi<x<(2k+2)\pi$ per ogni numero intero k)

4. Determinare l'insieme di definizione della funzione $f(x)=\sqrt{x^2-2x-3}-x+2$ e i valori di x per cui $f(x)\geq 0$.

La funzione è definita per tutte le x per cui $x^2-2x-3\geq 0$. Fattorizzando abbiamo $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$, dunque l'insieme di definizione è $x\leq -1$ e $x\geq 3$.
La condizione $f(x)\geq 0$ equivale a

$$\sqrt{x^2-2x-3}\geq x-2.$$

Questa condizione è sempre verificata quando il membro di destra è negativo, cioè (nell'insieme di definizione di $f(x)$) per $x\leq -1$.
La condizione è inoltre verificata quando la quantità sotto radice è maggiore o uguale al quadrato del membro di destra, ovvero

$$x^2-2x-3\geq (x-2)^2=x^2-4x+4,$$

che è verificata per $x\geq \frac{7}{2}$.
Dunque, $f(x)\geq 0$ per $x\leq -1$ e $x\geq \frac{7}{2}$.

5. Determinare l'immagine della funzione $f(x)=(x-1)|x-1|$. Stabilire inoltre se è invertibile e calcolarne l'eventuale funzione inversa.

f è data dalla composizione di $f_1(x)=x-1$ e $f_2(x)=x|x|=\begin{cases} x^2 & \text{se } x\geq 0 \\ -x^2 & \text{se } x<0 \end{cases}$, che hanno entrambe per immagine l'intera retta reale e sono entrambe invertibili. Dunque, anche f avrà per immagine tutto $\mathbb{R}$ e sarà invertibile.

Per calcolarne l'inversa scriviamo $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{se } x \geq 1 \\ -(x-1)^2 & \text{se } x < 1 \end{cases}$ e distinguiamo i due casi.

Se $x \geq 1$ allora $f(x) \geq 0$ e $f(x) = y$ equivale a $(x-1)^2 = y$, cioè $x - 1 = \sqrt{y}$ e quindi $x = \sqrt{y} + 1$.
Se invece $x < 1$ allora $f(x) < 0$ e $f(x) = y$ equivale a $(x-1)^2 = -y$, cioè $x = -\sqrt{y} + 1$.
Dunque, l'inversa di f è $f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{y} + 1 & \text{se } y \geq 0 \\ -\sqrt{y} + 1 & \text{se } y < 0 \end{cases}$.