Sapienza - Università di Roma - Corso di Laurea in Ingegneria Elettrotecnica

Soluzioni degli esercizi di Analisi Matematica I

A.A. 2016 – 2017 - Docente: Luca Battaglia

Lezione 11 del 20 – 22 Dicembre 2016
Argomento: Equazioni differenziali, studio di funzioni integrali

Risolvere le seguenti equazioni differenziali e determinarne l'intervallo massimale di esistenza:

1. $\begin{cases} y'(x) = (y(x))^2 + y(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$

   Per separazione di variabili otteniamo $\dfrac{y'(t)}{(y(t))^2 + y(t)} = 0$, dunque integrando tra 0 e x:

$$\begin{aligned} x &= \int_0^x \mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \frac{y'(t)}{(y(t))^2 + y(t)}\mathrm{d}t \\ &\overset{(z=y(t))}{=} \int_{y(0)}^{y(x)} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+z} \\ &= \int_{y(0)}^{y(x)} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}\right)\mathrm{d}z \\ &= [\log|z| - \log|z+1|]_1^{y(x)} \\ &= \log|y(x)| - \log|y(x)+1| + \log 2 \\ &= \log\left|\frac{2y(x)}{y(x)+1}\right| \end{aligned}$$

   Poiché per $x = 0$ abbiamo $\dfrac{2y(0)}{y(0)+1} = 1 > 0$, allora scegliamo il segno positivo per il logaritmo e abbiamo $x = \log\dfrac{2y(x)}{y(x)+1}$, dunque la soluzione è $y(x) = \dfrac{e^x}{2-e^x}$.

   L'intervallo massimale sarà il più grande intervallo contenente $x = 0$ per cui $x \to \dfrac{e^x}{2-e^x}$ è definita, cioè $(-\infty, \log 2)$.

2. $\begin{cases} y'(x) = -\tan(y(x))x \\ y(0) = \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$

   Per separazione di variabile si ottiene

$$\begin{aligned} -\frac{x^2}{2} &= -\int_0^x t\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \frac{y'(t)}{\tan(y(t))}\mathrm{d}t \\ &\overset{(z=y(t))}{=} \int_{y(0)}^{y(x)} \frac{\mathrm{d}z}{\tan z} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{y(x)} \frac{\cos z}{\sin z} \mathrm{d}z \\
&= [\log|\sin z|]_{\frac{\pi}{6}}^{y(x)} \\
&= \log(\sin(y(x))) - \log\frac{1}{2},
\end{aligned}
$$

dunque $\log(\sin(y(x))) = \log\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}$ e cioè $y(x) = \arcsin\frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}$. Poiché l'arcoseno è definito quando l'argomento è strettamente compreso tra -1 e 1 e noi abbiamo $0 < \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}} \leq \frac{1}{2}$, allora l'intervallo massimale è tutto $\mathbb{R}$.

Risolvere le seguenti equazioni differenziali lineari:

3. $\begin{cases} y'(x) - 3y(x) = 3\cos x + \sin x \\ y(0) = 0 \end{cases}$

   La soluzione dell'equazione omogenea associata è $y_0(x) = ce^{3x}$. Troviamo ora una soluzione col metodo della similitudine, dunque una soluzione del tipo $y(x) = A\cos x + B\sin x$. Poiché $y'(x) = -A\sin x + B\cos x$, allora $y'(x) - 3y(x) = (B - 3A)\cos x - (A + 3B)\sin x$, dunque A, B risolveranno $\begin{cases} B - 3A = 3 \\ -A - 3B = 1 \end{cases}$, cioè $A = -1, B = 0$ e quindi la soluzione particolare è $y(x) = -\cos x$.
   La soluzione generale è dunque $y(x) = ce^{3x} - \cos x$, con c data dalla condizione iniziale: poiché $y(0) = c - 1$, nel nostro caso $c = 1$ e dunque $y(x) = e^{3x} - \cos x$.

4. $\begin{cases} y'(x) - \dfrac{x}{1+x^2}y(x) = \left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

   Le soluzioni dell'equazione omogenea sono date da

   $$y_0(x) = e^{-\int -\frac{x}{1+x^2}} = e^{\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}} = e^{\frac{1}{2}\left(\log\left(1+x^2\right)+c'\right)} = ce^{\frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)} = c\sqrt{1+x^2}.$$

   Cercando, attraverso la variazione delle costanti, una soluzione del tipo $y(x) = c(x)y_0(x)$, abbiamo

   $$\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}} = y'(x) - \frac{x}{1+x^2}y(x) = c'(x)y_0(x) + c(x)y_0'(x) - \frac{x}{1+x^2}c(x)y_0(x) = c'(x)y_0(x),$$

   dunque $c'(x) = \dfrac{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y_0(x)} = 1 + x^2$ e pertanto $c(x) = x + \dfrac{x^3}{3}$. La soluzione particolare dell'equazione sarà quindi $y(x) = \sqrt{1+x^2}\left(x + \dfrac{x^3}{3}\right)$ e la soluzione generale sarà $y(x) = \sqrt{1+x^2}\left(c + x + \dfrac{x^3}{3}\right)$, con c determinato dalle condizioni iniziali: avendo $y(0) = c$, dovrà essere $c = 1$ e cioè $y(x) = \sqrt{1+x^2}\left(1 + x + \dfrac{x^3}{3}\right)$.

5. $\begin{cases} y''(x) - y(x) = \cos x + e^{2x} \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

   Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$, dunque l'equazione omogenea ha per soluzioni $y_0(x) = Ae^x + Be^{-x}$. Cerchiamo ora, con il metodo della similitudine, una soluzione particolare del tipo $y(x) = C\sin x + D\cos x + Ee^{2x}$: derivando otteniamo $y'(x) = C\cos x - D\sin x + 2Ee^{2x}$ e $y''(x) = -C\sin x - D\cos x + 4Ee^{2x}$, quindi $y''(x) - y(x) = -2C\sin x -$

$2D\cos x + 3Ee^{2x}$, dunque $C = 0, D = -\dfrac{1}{2}, E = \dfrac{1}{3}$.

La soluzione generale è dunque $y(x) = Ae^x + Be^{-x} - \dfrac{\cos x}{2} + \dfrac{e^{2x}}{3}$, con A, B che determineremo imponendo le condizioni iniziali: essendo $y'(x) = Ae^x - Be^{-x} + \dfrac{\sin x}{2} + \dfrac{2}{3}e^{2x}$, allora le condizioni iniziali daranno $\begin{cases} A + B - \dfrac{1}{6} = 1 \\ A - B + \dfrac{2}{3} = 1 \end{cases}$, cioé $A = \dfrac{3}{4}, B = \dfrac{5}{12}$ e la soluzione quindi sarà $y(x) = \dfrac{3}{4}e^x + \dfrac{5}{12}e^{-x} - \dfrac{\cos x}{2} + \dfrac{e^{2x}}{3}$.

6. $\begin{cases} y''(x) + 4y(x) = \sin(2x) \\ y'(0) = \dfrac{3}{4} \\ y(0) = 2 \end{cases}$

Il polinomio caratteristico $\lambda^2 + 4$ ha per radici $\pm 2i$, dunque le soluzioni dell'omogenea sono del tipo $y_0(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x)$ e tra queste c'è anche il termine noto. Dunque la soluzione particolare con il metodo della similitudine andrà cercata del tipo $y(x) = x(C\cos(2x) + D\sin(2x))$: poiché si ottiene $y''(x) + 4y(x) = 4D\cos(2x) - 4C\sin(2x)$, allora avremo $C = -\dfrac{1}{4}$ e $D = 0$, dunque $y(x) = -\dfrac{x\cos(2x)}{4}$.

La soluzione generale è dunque $y(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x) - \dfrac{x\cos(2x)}{4}$ e nel nostro caso A, B saranno determinati dalle condizioni iniziali. Abbiamo $y'(x) = \left(2B - \dfrac{1}{4}\right)\cos(2x) - 2A\sin(2x) + \dfrac{x\sin(2x)}{2}$ che in $x = 0$ da $y'(0) = 2B - \dfrac{1}{4}$. Dunque A, B risolveranno $\begin{cases} 2B - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4} \\ A = 2 \end{cases}$, cioè $A = 2, B = \dfrac{1}{2}$ e la nostra soluzione è $y(x) = 2\cos(2x) + \dfrac{\sin(2x)}{2} - \dfrac{x\cos(2x)}{4}$.

Studiare le seguenti funzioni, determinando l'insieme di definizione, il segno, eventuali asintoti, la monotonia, eventuali punti di massimo e minimo, eventuali punti non derivabilità:

7. $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(\sin t)^2}{1+t^2}\mathrm{d}t$

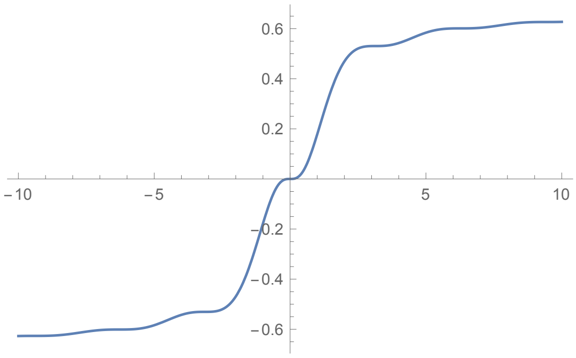
La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ perché, a ogni x fissato, la funzione è definita da un integrale di una funzione limitata su intervallo limitato.

Poiché l'integranda è positiva, la funzione sarà positiva per $x > 0$, mentre per $x < 0$ dalle proprietà dell'integrale abbiamo $f(x) = -\displaystyle\int_x^0 \frac{(\sin t)^2}{1+t^2}\mathrm{d}t$; per $x = 0$ abbiamo chiaramente $f(0) = 0$.

Per x che tende a $+\infty$ abbiamo $f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^2}{1+t^2}$, che è un integrale improprio convergente perché $\dfrac{(\sin t)^2}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2}$ che è integrabile. Dunque f ha un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. Per $x \to -\infty$ abbiamo un altro asintoto orizzontale perché

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \int_0^{-\infty} \frac{(\sin t)^2}{1+t^2}\mathrm{d}t \overset{(s=-t)}{=} -\int_0^{+\infty} \frac{(\sin s)^2}{1+s^2}\mathrm{d}s = -\lim_{x\to+\infty} f(x).$$

Dal teorema fondamentale di calcolo abbiamo $f'(x) = \dfrac{(\sin x)^2}{1+x^2}$, dunque la funzione è derivabile per ogni x. Inoltre, poiché $f' \geq 0$ su tutto $\mathbb{R}$, la funzione sarà dappertutto monotona crescente. Abbiamo $f'(x) = 0$ per tutti i multipli interi di π, ma essendo la funzione monotona crescente nessuno di questi è né di massimo né di minimo.



8. $f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{e^t - 1}{t\sqrt[3]{t}} \mathrm{d}t & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

   Per studiare l'insieme di definizione di f bisogna verificare la convergenze dell'integrale che la definisce. Questo integrale converge, perché, dalla stima $e^t - 1 \sim t$ per $t \sim 0$ abbiamo $\displaystyle\int_0^x \frac{e^t - 1}{t\sqrt[3]{t}} \mathrm{d}t \sim \int_0^x \frac{1}{\sqrt[3]{t}}$ che converge. Dunque f è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

   La funzione sarà positiva per $x > 0$, perché l'integranda è positiva. Per $x < 0$ invece l'integranda è negativa ma gli estremi vanno "invertiti" dunque anche qui la funzione è positiva:

$$f(x) = -\int_x^0 \underbrace{\frac{e^t - 1}{t\sqrt[3]{t}}}_{<0} \mathrm{d}t > 0.$$

   Per $x \to +\infty$ l'integranda tende a $+\infty$ e dunque avremo

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^t - 1}{t\sqrt[3]{t}} \mathrm{d}t = +\infty.$$

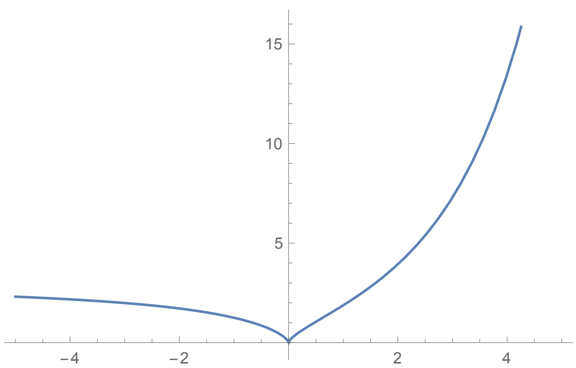
   Per $x \to -\infty$ invece l'integranda va a 0 come $-\dfrac{1}{t\sqrt[3]{t}}$, dunque l'integrale tra 0 e $-\infty$ convergerà e quindi avremo un asintoto orizzontale

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \int_0^{-\infty} \frac{e^t - 1}{t\sqrt[3]{t}} \mathrm{d}t < +\infty.$$

   Dal teorema fondamentale del calcolo abbiamo $f'(x) = \dfrac{e^x - 1}{x\sqrt[3]{x}}$ per $x \neq 0$. In $x = 0$ invece la funzione non è derivabile perché, calcolando il limite del rapporto incrementale con de l'Hôpital:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \frac{e^t - 1}{t\sqrt[3]{t}}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x\sqrt[3]{x}} = \pm\infty.$$

   $f'(x)$ è sempre positiva per x positiva e negativa per x negativa, dunque $f(x)$ è monotona crescente per $x > 0$ e decrescente per $x < 0$. L'unico punto di non derivabilità è $x = 0$, che è un punto di minimo perché per ogni altra x abbiamo $f(x) > 0 = f(0)$. Poiché non vi sono altri punti in cui la derivata si annulla o non esiste, non ci sono punti di minimo.



15
10
5
−4
−2
2
4