Sapienza - Università di Roma - Corso di Laurea in Ingegneria Elettrotecnica

Soluzioni degli esercizi di Analisi Matematica I

A.A. 2016 – 2017 - Docente: Luca Battaglia

Lezione 10 del 15 Dicembre 2016
Argomento: Integrali impropri, equazioni differenziali

1. Studiare la convergenza dei seguenti integrali impropri:

   (a) $\int_0^1 \frac{(\sin\sqrt{x})^3}{x^2}\mathrm{d}x$
   L'integranda è limitata su tutto l'intervallo $[0,1]$, che è limitato, tranne che in 0. Dunque, basterà discutere il comportamento per $x \sim 0$.
   Poiché $\sin\sqrt{x} \sim \sqrt{x}$ per $x \sim 0$, allora $\frac{(\sin\sqrt{x})^3}{x^2} \sim \frac{(\sqrt{x})^3}{x^2} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$, che è integrabile intorno a $x = 0$, dunque l'integrale converge.

   (b) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - \sin x - 1}\mathrm{d}x$
   Bisognerà verificare l'andamento della funzione all'infinito e in $x = 0$, punto in cui l'integranda non è limitata.
   All'infinito il termine dominante al denominatore è e^x, dunque abbiamo $\frac{x}{e^x - \sin(x) - 1} \sim \frac{x}{e^x}$ che è integrabile.
   Intorno a $x = 0$ valgono le stime $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$ e $\sin x = x + o\left(x^2\right)$, dunque $\frac{x}{e^x - \sin(x) - 1} = \frac{x}{\frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)} \sim \frac{2}{x}$ che non è integrabile.
   Dunque l'integrale non converge.

2. Studiare la convergenza, al variare del parametro reale a, dei seguenti integrali impropri:

   (a) $\int_0^{+\infty} x^a(1 - e^{-x})\mathrm{d}x$
   All'infinito l'integranda va asintoticamente come x^a, che è integrabile per $a < -1$.
   In $x = 0$, unico punto in cui l'integranda non è limitata, utilizziamo la stima $1 - e^{-x} \sim x$ e abbiamo $x^a(1 - e^{-x}) \sim x^{a+1}$ che è integrabile per $a > -2$.
   Dunque l'integrale converge per $-2 < a < -1$.

   (b) $\int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^a \log x\mathrm{d}x$
   Bisogna verificare gli andamenti asintotici in $x = 0$ e $x = 1$.
   Intorno a 0 l'integranda si comporta come $x^a \log x$ che è integrabile per $a > -1$. Intorno a 1 invece, data la stima $\log x \sim 1 - x$, abbiamo $\left(\frac{x}{1-x}\right)^a \log x \sim (1-x)^{1-a}$ che sarà integrabile per $1 - a > -1$ cioè $a < 2$.
   Mettendo insieme le due condizioni otteniamo che l'integrale converge per $-1 < a < 2$.

3. Calcolare i seguenti integrali impropri:

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x}}{x-x^2}\mathrm{d}x$

L'integranda ha problemi solo in $x=0$ ma l'andamento è lo stesso di $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ che è integrabile, dunque l'integrale converge.

Per calcolarlo, utilizziamo il cambio di variabile $y=\sqrt{x}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x}}{x-x^2}\mathrm{d}x &= 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}} \\
&= 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\mathrm{d}y}{1-y^2} \\
&= 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{2}\frac{1}{y+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{y-1}\right)\mathrm{d}y \\
&= 2\left[\frac{1}{2}\log|y+1|-\frac{1}{2}\log|y-1|\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= \log\left|\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right|-\log\left|\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right| \\
&= \log\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}+1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= \log\left(3+2\sqrt{2}\right).
\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x$

L'integranda ha, per $x\to+\infty$, lo stesso andamento di $\dfrac{\log x}{x^2}$, che è integrabile. In $x=0$ ha invece lo stesso andamento di $\log x$ che è anch'essa integrabile, dunque l'integrale converge.

Per calcolarlo, integriamo per parti:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x &= \lim_{a\to0}\lim_{b\to+\infty}\int_a^b \frac{\log x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{a\to0}\lim_{b\to+\infty}\left(\left[-\frac{\log x}{x+1}\right]_a^b+\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}\right) \\
&= \lim_{a\to0}\lim_{b\to+\infty}\left(\left[-\frac{\log x}{x+1}\right]_a^b+\int_a^b\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x\right) \\
&= \lim_{a\to0}\lim_{b\to+\infty}\left(\left[-\frac{\log x}{x+1}\right]_a^b+[\log|x|-\log|x+1|]_a^b\right) \\
&= \lim_{a\to0}\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{\log b}{b+1}+\frac{\log a}{a+1}+\log b-\log(b+1)-\log a+\log(a+1)\right) \\
&= \lim_{a\to0}\left(\frac{\log a}{a+1}-\log a+\log(a+1)\right)+\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{\log b}{b+1}+\log b-\log(b+1)\right) \\
&= \lim_{a\to0}\left(\frac{a}{a+1}\log a+\log(a+1)\right)+\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{\log b}{b+1}+\log\frac{b}{b+1}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

4. Risolvere le seguenti equazioni differenziali e determinarne l'intervallo massimale di esistenza:

(a) $\begin{cases} y'(x) = e^{-y(x)} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Attraverso la separazione di variabili si ottiene $y'(t)e^{y(t)} = 1$, che integrato tra 0 e x da:

$$x = \int_0^x 1 \mathrm{d}t = \int_0^x y'(t)e^{y(t)} \mathrm{d}t \overset{(z=y(t))}{=} \int_{y(0)}^{y(x)} e^z \mathrm{d}z = e^{y(x)} - e^{y(0)} = e^{y(x)} - 1,$$

dunque otteniamo che la soluzione è $y(x) = \log(1 + x)$.

Poiché abbiamo la condizione iniziale in $x = 0$, come intervallo massimale abbiamo il più grande intervallo contenente $x = 0$ in cui la funzione $x \to \log(1 + x)$ è definita, cioè $(-1, +\infty)$.

(b) $\begin{cases} y'(x) = (\cos(y(x)))^2 \cos x \\ y(0) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

Per separazione di variabili otteniamo

$$\sin x = \int_0^x \cos t \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{y'(t)}{(\cos y(t))^2} \mathrm{d}t \overset{(z=y(t))}{=} \int_{y(0)}^{y(x)} \frac{\mathrm{d}z}{(\cos z)^2} = [\tan z]_{\frac{\pi}{4}}^{y(x)} = \tan(y(x)) - 1,$$

dunque otteniamo $y(x) = \arctan(1 + \sin x)$, che è definito per ogni x e dunque l'intervallo massimale è tutto $\mathbb{R}$.