

# Soluzioni del tutoraggio di Analisi Matematica I

A.A. 2016 – 2017 - Docente: Luca Battaglia

TUTORAGGIO 8 DEL 28 NOVEMBRE - 1 DICEMBRE 2016  
ARGOMENTO: INTEGRALI

1. Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

(a)  $\int (x+1)e^{x^2+2x} dx$

$$\int (x+1)e^{x^2+2x} dx = \frac{1}{2} \int (2x+2)e^{x^2+2x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d}{dx} e^{x^2+2x} dx = \frac{1}{2} e^{x^2+2x} + C.$$

(b)  $\int \frac{(\log x)^5}{x}$

Con la sostituzione  $y = \log x$  si ottiene

$$\int \frac{(\log x)^5}{x} = \int y^5 dy = \frac{y^6}{6} + C = \frac{(\log x)^6}{6} + C.$$

(c)  $\int x^5 \log x dx$

Integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned} \int x^5 \log x dx &= \int \left( \frac{d}{dx} \frac{x^6}{6} \right) \log x dx \\ &= \frac{x^6}{6} \log x - \int \frac{x^6}{6} \frac{1}{x} + C \\ &= \frac{x^6}{6} \log x - \frac{1}{6} \int \frac{x^5}{6} + C \\ &= \frac{x^6}{6} \log x - \frac{x^6}{36} + C. \end{aligned}$$

(d)  $\int x^3 \sin(x^2) dx$

Con la sostituzione  $y = \sin(x^2)$  e poi integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned} \int x^3 \sin(x^2) dx &= \frac{1}{2} \int y \sin y dy \\ &= \frac{1}{2} \left( -y \cos y + \int \cos y dy \right) + C \\ &= \frac{1}{2} (-y \cos y + \sin y) + C \\ &= -\frac{x^2}{2} \cos(x^2) + \frac{\sin(x^2)}{2} + C. \end{aligned}$$

(e)  $\int \frac{dx}{x^4 - 1}$

Provando a scrivere

$$\frac{1}{x^4 - 1} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x - 1} + \frac{D}{x + 1} = \frac{(A + C + D)x^3 + (B + C - D)x^2 + (-A + C + D)x + (-B + C - D)}{x^4 - 1}$$

si ottiene  $A = 0, B = -\frac{1}{2}, C = \frac{1}{4}, D = -\frac{1}{4}$ , dunque

$$\frac{1}{x^4 - 1} = \int \left( -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{4} \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{4} \frac{1}{x - 1} \right) = -\frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{4} \log |x + 1| - \frac{1}{4} \log |x - 1| + C$$

(f)  $\int \frac{x^3}{x^2 - 4} dx$

$$\int \frac{x^3}{x^2 - 4} = \int \left( x + 2 \frac{2x}{x^2 - 4} \right) = \frac{x^2}{2} + \log |x^2 - 4| + C.$$

(g)  $\int \frac{dx}{1 + \sin(x)}$

Con la sostituzione  $t = \tan \frac{x}{2}$  si ottiene

$$\int \frac{dx}{1 + \sin(x)} = \int \frac{1}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = 2 \int \frac{dt}{(1+t)^2} = -\frac{2}{1+t} + C = -\frac{2}{1 + \tan \frac{x}{2}} + C.$$

2. Calcolare i seguenti integrali definiti:

(a)  $\int_0^{\pi^3} \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{x^{\frac{2}{3}}} dx.$

Con la sostituzione  $y = \sqrt[3]{x}$  si ottiene

$$\int_0^{\pi^3} \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{x^{\frac{2}{3}}} dx = \int_0^{\pi^3} \frac{3 \sin \sqrt[3]{x}}{3x^{\frac{2}{3}}} dx = \int_0^{\pi} 3 \sin y dy = [-3 \cos(y)]_0^{\pi} = -3 \cos \pi + 3 \cos 0 = 6.$$

(b)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^5 dx$

Con la sostituzione  $y = \sin x$  si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^5 dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - (\sin x)^2)^2 \cos x dx \\ &= \int_0^1 (1 - y^2)^2 dy \\ &= \int_0^1 (1 - 2y^2 + y^4) dy \\ &= \left[ y - \frac{2}{3} y^3 + \frac{y^5}{5} \right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \\ &= \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

$$(c) \int_{-1}^1 |x|e^x dx$$

Dividendo l'integrale tra  $[-1, 0]$  e  $[0, 1]$  e integrando entrambi per parti si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |x|e^x dx &= \int_{-1}^0 -xe^x dx + \int_0^1 xe^x dx \\ &= [-xe^x]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 e^x dx + [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \\ &= -\frac{1}{e} + [e^x]_{-1}^0 + e - [e^x]_0^1 \\ &= -\frac{1}{e} + 1 - \frac{1}{e} + e - e + 1 \\ &= 2 - \frac{2}{e} \end{aligned}$$

$$(d) \int_1^e (\log x)^2 dx$$

Integrando per parti e ricordando che l'integrale indefinito del logaritmo è  $\int \log x dx = x \log x - x + C$  si ottiene

$$\begin{aligned} \int_1^e (\log x)^2 dx &= [(x \log x - x) \log x]_1^e - \int_1^e (x \log(x) - x) \frac{1}{x} dx \\ &= [x(\log x)^2 - x \log x]_1^e - \int_1^e (\log x - 1) dx \\ &= -\int_1^e (\log x - 1) dx \\ &= -[x \log x - 2x]_1^e \\ &= e - 2. \end{aligned}$$

$$(e) \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$$

Con la sostituzione  $y = \sqrt{x}$  si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx &= \int_0^1 \frac{2x}{1+x} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{2y^2}{1+y^2} dy \\ &= 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+y^2}\right) dy \\ &= 2[y - \arctan(y)]_0^1 \\ &= 2(1 - \arctan 1) \\ &= 2 - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$$(f) \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos x}$$

Con la sostituzione  $y = \cos(x)$  si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos x} &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{(\cos x)^2} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{1 - (\sin x)^2} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{1-y^2} \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{2} \frac{1}{y+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{y-1} \right) dy \\
&= \frac{1}{2} [\log |y+1| - \log |y-1|]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2} \left( \log \frac{3}{2} - \log \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{\log 3}{2}.
\end{aligned}$$

(g)  $\int_0^{\log 2} \frac{dx}{e^x + e^{-x} - 1}$ .

Con la sostituzione  $y = e^x$  si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_0^{\log 2} \frac{dx}{e^x + e^{-x} - 1} &= \int_0^{\log 2} \frac{e^x}{e^{2x} - e^x + 1} dx \\
&= \int_1^2 \frac{dy}{y^2 - y + 1} \\
&= \int_1^2 \frac{dy}{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_1^2 \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2y-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dy \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \left[ \arctan \frac{2y-1}{\sqrt{3}} \right]_1^2 \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \arctan \sqrt{3} - \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\
&= \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$