

# Soluzioni del tutoraggio di Analisi Matematica I

A.A. 2016 – 2017 - Docente: Luca Battaglia

TUTORAGGIO 4 DEL 27 OTTOBRE 2016  
ARGOMENTO: DERIVATE

1. Trovare l'insieme di derivabilità della funzione  $f(x) = x\sqrt{1-|x|}$ .  
La funzione è chiaramente derivabile in  $(-1, 0) \cup (0, 1)$  in quanto composizione di funzioni elementari derivabili. Per vedere se lo è anche nei punti  $x = -1, 0, 1$  applichiamo la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale.  
In  $x = 0$   $f(x)$  è derivabile perché

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1-|x|} = 1.$$

Negli altri due punti invece  $f$  non è derivabile perché provando a calcolare  $f'(-1)$  si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{1-x}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{x}{\sqrt{1-x}} = -\infty;$$

analogamente, in  $x = -1$  si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x\sqrt{1+x}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{\sqrt{1+x}} = +\infty.$$

Dunque,  $f(x)$  è derivabile per  $-1 < x < 1$  e la risposta esatta è (c).

2. Trovare l'insieme di derivabilità della funzione  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1 - \cos(x)}$ .  
La funzione è sicuramente derivabile fintanto che l'argomento della radice non si annulla. Poiché  $x^2$  e  $1 - \cos(x)$  sono due quantità non-negative che si annullano solo per  $x = 0$ , l'argomento della radice si annulla solo in  $x = 0$  e dunque  $f'(x)$  esiste per  $x > 0$ .  
In  $x = 0$  abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1 - \cos(x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2}}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1 + \frac{1 - \cos(x)}{x^2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

ma quest'ultimo limite non esiste, perché vale  $\sqrt{\frac{3}{2}}$  per  $x \rightarrow 0^+$  e  $-\sqrt{\frac{3}{2}}$  per  $x \rightarrow 0^-$ .

Dunque,  $f(x)$  è derivabile in ogni  $x \neq 0$  e la risposta esatta è (b).

3. Trovare l'insieme di derivabilità della funzione  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x-1} \log(x^3 - 3x^2 + 3x) & 0 < x < 1, x > 1 \\ 0 & x = 0, 1 \end{cases}$ .

La funzione è chiaramente derivabile per  $0 < x < 1$  e  $x > 1$ . In  $x = 0$  il limite del rapporto incrementale è

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x-1} \log(x^3 - 3x^2 + 3x)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x-1} (\log(x) + \log(x^2 - 3x + 2)) \\
&= - \lim_{x \rightarrow 0} x (\log(x) + 2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

dunque  $f'(0)$  esiste e vale 0.

In  $x = 1$  invece abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{(x-1)^2} \log(1 + (x-1)^3) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(1 + (x-1)^3)}{(x-1)^3} \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0,$$

dunque anche in  $x = 1$  la derivata esiste (e vale nuovamente 0).

La risposta esatta è dunque (a).

4. Trovare i valori del parametro reale  $a$  per cui la funzione  $f(x) = \sqrt{\log(1 + a^2 + x^2)}$  è derivabile nel punto  $x = 0$ .

Se  $a > 0$ , allora l'argomento del logaritmo è sempre maggiore di 1 e dunque l'argomento della radice è positivo e quindi  $f$  è sempre derivabile, anche in  $x = 0$ .

Per  $a = 0$  invece la funzione non è derivabile perché avremmo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\log(1 + x^2)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2}}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\log(1 + x^2)}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x},$$

che non esiste.

Dunque,  $f'(0)$  esiste per ogni  $a \neq 0$  e dunque la risposta corretta è (b).

5. Trovare i valori del parametro reale  $a$  per cui la funzione  $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(ax)}{x} & x > 0 \\ ax & x \leq 0 \end{cases}$  è

derivabile nel punto  $x = 0$ .

Bisogna verificare che il limite del rapporto incrementale sia lo stesso per  $x \rightarrow 0^+$  e  $x \rightarrow 0^-$ .

Nel primo caso abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(ax)}{x^2} = a^2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(ax)}{(ax)^2} = \frac{a^2}{2}.$$

Nel secondo caso abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax}{x} = a.$$

Dunque,  $f'(0)$  esiste se e solo se  $\frac{a^2}{2} = a$ , cioè per  $a = 0$  e  $a = 2$ , dunque la risposta esatta è (d).

6. Trovare i valori del parametro reale  $a$  per cui la funzione  $f(x) = \begin{cases} |x|^a e^{-|x|^a} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$  è

derivabile nel punto  $x = 0$ .

Innanzitutto, se  $a = 0$  allora  $f(x)$  è identicamente nulla e dunque è ovviamente derivabile.

Per gli altri valori di  $a$  scriviamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^a}{x} e^{-|x|^a}.$$

I limiti dei due fattori si calcolano facilmente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^a}{x} = \begin{cases} 0 & a > 1 \\ \text{non esiste} & a \leq 1 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0} e^{-|x|^a} = \begin{cases} 1 & a > 0 \\ 0 & a < 0 \end{cases}$$

Dunque, per  $a > 1$  il limite esiste ed è 0, mentre per  $0 < a \leq 1$  il limite non esiste. Per  $a < 1$  avremmo una forma indeterminata, ma il termine che tende a 0 è esponenziale mentre l'altro è polinomiale, dunque il limite del prodotto anche in questo caso esiste e vale 0. In tutto,  $f$  è derivabile in 0 per  $a \leq 0$  e  $a > 1$  e quindi la risposta esatta è (a).

7. Trovare gli intervalli in cui la funzione  $f(x) = 4e^x - e^{2x}$  è monotona crescente.

La derivata di  $f$  è  $f'(x) = 4e^x - 2e^{2x}$ . Gli intervalli in cui  $f$  è monotona crescente sono quelli in cui  $f' > 0$ .

Scrivendo  $f'(x) = 2e^x(2 - e^x)$  otteniamo che  $f'(x) > 0$  per  $x < \log(2)$ , dunque  $f(x)$  è monotona crescente per  $x < \log(2)$  e la risposta corretta è (a).

8. Trovare gli intervalli in cui la funzione  $f(x) = \left| \frac{x}{x^2 - 1} \right|$  è monotona crescente.

Scrivendo la funzione come  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2 - 1} & -1 < x \leq 0, x > 1 \\ -\frac{x}{x^2 - 1} & x < -1, 0 \leq x < 1 \end{cases}$  possiamo calcolare la

sua derivata:  $f'(x) = \begin{cases} -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} & -1 < x < 0, x > 1 \\ \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} & x < -1, 0 < x < 1 \end{cases}$ . Poiché  $f'(x)$  è sempre negativa

nel primo intervallo di definizione e sempre positiva nel secondo intervallo, allora l'intervallo in cui  $f$  è monotona crescente coincide con il secondo intervallo di definizione, cioè  $x < -1$  e  $-1 < x < 0$ .

Dunque, la risposta esatta è (b).

9. Trovare gli intervalli in cui la funzione  $f(x) = \log(1 + |x^2 - 4|)$  è monotona crescente.

Scrivendo  $f(x) = \begin{cases} \log(x^2 - 3) & x \leq -2, x \geq 2 \\ \log(5 - x^2) & -2 < x < 2 \end{cases}$ , possiamo facilmente calcolarne la derivata:

$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x^2 - 3} & x < -2, x > 2 \\ \frac{-2x}{5 - x^2} & -2 < x < 2 \end{cases}$ .

Nel primo intervallo di definizione di  $f$ , la derivata è positiva se e solo se  $x > 0$ , cioè per  $x > 2$ ; nel secondo intervallo di definizione invece è positiva se e solo se  $x < 0$ , cioè per  $-2 < x < 0$ . Dunque,  $f(x)$  è monotona per  $-2 < x < 0$  e  $x > 2$  e la risposta esatta è (b).

10. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione  $f(x) = \cos(2x)$  nel punto  $x_0 = \frac{\pi}{6}$ .

L'equazione della retta tangente al grafico di  $f$  in  $x_0$  è  $y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$ .

Poiché  $f'(x) = -2\sin(2x)$ , allora  $f'(x_0) = -2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$  e  $f(x_0) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$  e

l'equazione della retta tangente al grafico di  $f$  in  $x_0$  è  $y = -\sqrt{3}x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\pi$ .

Dunque la risposta esatta è (a).

11. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione  $f(x) = \log(\sin(x))$  nel punto  $x_0 = \frac{\pi}{4}$ .

Essendo  $f'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ , allora  $f(x_0) = \log\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\log(2)}{2}$  e  $f'(x_0) =$

$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 1$ .

Dunque, l'equazione della retta tangente è  $y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 = x - \frac{\log(2)}{2} - \frac{\pi}{4}$  e la risposta esatta è (c).

12. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione  $f(x) = 2^{|x-1|}$  nel punto  $x_0 = 0$ .

La derivata di  $f$  è  $f'(x) = \begin{cases} \log(2)2^{x-1} & x > 1 \\ -\log(2)2^{1-x} & x < 1 \end{cases}$ , dunque  $f'(0) = 2\log(2)$ .

Pertanto, l'equazione della retta tangente è  $y' = f'(0)x + f(0) = -2\log(2) + 2$  e la risposta corretta è (a).

13. Trovare il massimo ed il minimo valore della funzione  $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x$  sull'intervallo  $[0, 3]$ .

I possibili punti di massimo o minimo sono i due estremi dell'intervallo e i punti dell'intervallo in cui  $f'$  si annulla.

La derivata  $f$  è  $f'(x) = 6x^2 - 30x + 24 = 6(x-1)(x-4)$  che si annulla in  $x = 1$  e  $x = 4$ , ma quest'ultimo non fa parte dell'intervallo che consideriamo.

Poiché  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 11$  e  $f(3) = -9$ , concludiamo che  $\max_{[0,3]} f = f(1) = 11$  e  $\min_{[0,3]} f = f(3) = -9$  e che la risposta corretta è (d).

14. Trovare il massimo ed il minimo valore della funzione  $f(x) = 3|x| - x^2$  sull'intervallo  $[-2, 2]$ .

In questo caso bisogna considerare come possibili punti di massimo/minimo anche quelli in cui  $f$  non è derivabile, cioè  $x = 0$ .

Scrivendo  $f(x) = \begin{cases} -3x - x^2 & x < 0 \\ 3x - x^2 & x \geq 0 \end{cases}$ , la sua derivata sarà  $f'(x) = \begin{cases} -3 - 2x & x < 0 \\ 3 - 2x & x \geq 0 \end{cases}$ .

Quest'ultima si annulla in  $x = -\frac{3}{2}$  e  $x = \frac{3}{2}$  e abbiamo  $f\left(\pm\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$ , mentre in  $x = 0$  abbiamo  $f(0) = 0$  e agli estremi dell'intervallo  $f(\pm 2) = 2$ .

Dunque,  $\max_{[-2,2]} f = f\left(\pm\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$  e  $\min_{[-2,2]} f = f(0) = 0$  e la risposta esatta è (b).

15. Trovare il massimo ed il minimo valore della funzione  $f(x) = \sqrt{(3x - 2x^2)e^x}$  sull'intervallo  $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ .

Agli estremi dell'intervallo abbiamo  $f(0) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ . Poiché  $f$  è definita come una radice quadrata, non avrà valori negativi e dunque il suo valore minimo sarà proprio 0.

Per trovare il massimo di  $f$ , ne calcoliamo la derivata:  $f'(x) = \frac{(2x^2 + x - 3)e^x}{2\sqrt{(3x - 2x^2)e^x}} = \frac{2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x - 1)e^x}{2\sqrt{(3x - 2x^2)e^x}}$ .

L'unico punto in  $\left[0, \frac{3}{2}\right]$  che annulla  $f'$  è  $x = 1$  e dunque sarà necessariamente il punto in cui  $f$  raggiunge il suo massimo.

Riassumendo,  $\min_{\left[0, \frac{3}{2}\right]} f = f(0) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ ,  $\max_{\left[0, \frac{3}{2}\right]} f = f(1) = \sqrt{e}$  e la risposta esatta è (c).