

# Soluzione del tutoraggio di Analisi Matematica I

A.A. 2016 – 2017 - Docente: Luca Battaglia

TUTORAGGIO 3 DEL 20 OTTOBRE 2016  
ARGOMENTO: LIMITI, SUCCESSIONI

Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \sqrt{\cos(x)}}{x^2}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \sqrt{\cos(x)}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos(x)}}{x^2} \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos(x))^{\frac{1}{2}}}{\cos(x) - 1} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + (\cos(x) - 1))^{\frac{1}{2}} - 1}{\cos(x) - 1} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{5}{4}, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato i limiti notevoli  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$  e  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1 + y)^a - 1}{y} = a$  con  $a = \frac{1}{2}$ .

Dunque la risposta esatta è la (c).

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi e^x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\sin(\pi(e^x - 1))}{x} = -\pi \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi(e^x - 1))}{\pi(e^x - 1)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = -\pi,$$

dove abbiamo usato la proprietà fondamentale del seno  $\sin(\pi + y) = -\sin(y)$  e i limiti

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

Dunque, la risposta esatta è la (a).

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin(x) \cos(x))^{x + \frac{1}{x}}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin(x) \cos(x))^{x + \frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( (1 - \sin(x) \cos(x))^{\frac{1}{-\sin(x) \cos(x)}} \right)^{-\sin(x) \cos(x) \left( x + \frac{1}{x} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\sin(x) \cos(x) \left( x + \frac{1}{x} \right)} \\ &= e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1)} \\ &= \frac{1}{e}, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il limite notevole  $\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e$ .

La risposta esatta è dunque la (b).

$$4. \lim_{x \rightarrow e} \frac{(x - e) \log(\log(x))}{1 - \cos(x - e)}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow e} \frac{(x - e) \log(\log(x))}{1 - \cos(x - e)} &= \lim_{x \rightarrow e} \frac{(x - e) \log \left( \log \left( 1 + \frac{x - e}{e} \right) + 1 \right)}{1 - \cos(x - e)} \\ &= \lim_{x \rightarrow e} \frac{1}{e} \frac{\frac{\log(\log(1 + \frac{x - e}{e}) + 1)}{\frac{x - e}{e}}}{\frac{1 - \cos(x - e)}{(x - e)^2}} \\ &= \frac{1}{e} \lim_{x \rightarrow e} \frac{\frac{\log(\log(1 + \frac{x - e}{e}) + 1)}{\log(1 + \frac{x - e}{e})} \frac{\log(1 + \frac{x - e}{e})}{\frac{x - e}{e}}}{\frac{1 - \cos(x - e)}{(x - e)^2}} \\ &= \frac{1}{e} \frac{\lim_{x \rightarrow e} \frac{\log(\log(1 + \frac{x - e}{e}) + 1)}{\log(1 + \frac{x - e}{e})} \lim_{x \rightarrow e} \frac{\log(1 + \frac{x - e}{e})}{\frac{x - e}{e}}}{\lim_{x \rightarrow e} \frac{1 - \cos(x - e)}{(x - e)^2}} \\ &= \frac{2}{e}, \end{aligned}$$

dove sono stati usati i limiti notevoli  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1 + y)}{y} = 1$  e  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(y)}{y^2} = \frac{1}{2}$ .

La risposta esatta è dunque la (a).

$$5. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n + 5}{n + 7} \right)^{3n}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n + 5}{n + 7} \right)^{3n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{2}{n + 7} \right)^{3n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \left( 1 - \frac{2}{n + 7} \right)^{\frac{n + 7}{2}} \right)^{\frac{-6n}{n + 7}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{-6n}{n + 7}} \\ &= \frac{1}{e^6}, \end{aligned}$$

dunque la risposta esatta è la (a).

$$6. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(n^2 + 3n + 1) - 2 \log(n)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \tan\left(\frac{2}{n^2}\right)}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(n^2 + 3n + 1) - 2 \log(n)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \tan\left(\frac{2}{n^2}\right)} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{3n + 1}{n^2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \tan\left(\frac{2}{n^2}\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{3n + 1}{n^2}\right)}{\frac{3n + 1}{n^2}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3n + 1}{n^2}}{\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \tan\left(\frac{2}{n^2}\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3n + 1}{n^2}}{\frac{1}{n} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} + \frac{2}{n^2} \frac{\tan\left(\frac{2}{n^2}\right)}{\frac{2}{n^2}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3n + 1}{n^2}}{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n+1}{n+2} \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} \\
&= 3,
\end{aligned}$$

dunque la risposta esatta è (d).

$$7. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\log(n)} e^{\sin(n)}$$

Poiché  $\frac{1}{e} \frac{\sqrt[3]{n}}{\log(n)} \leq \frac{\sqrt[3]{n}}{\log(n)} e^{\sin(n)} \leq e \frac{\sqrt[3]{n}}{\log(n)}$  e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e} \frac{\sqrt[3]{n}}{\log(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e \frac{\sqrt[3]{n}}{\log(n)} = +\infty$ , dal teorema dei carabinieri concludiamo che il limite è zero e la risposta esatta è (c).

$$8. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{n!} + n^{-n}\right)}{1 - \cos(3^{-n})}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{n!} + n^{-n}\right)}{1 - \cos(3^{-n})} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{n!} + n^{-n}\right)}{\frac{1}{n!} + n^{-n}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9^{-n}}{1 - \cos(3^{-n})} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n!} + n^{-n}}{9^{-n}} \\
&= 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n!} + n^{-n}}{9^{-n}} \\
&= 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9^n}{n!} + \frac{9^n}{n^n} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato il limite notevole  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$ .

Dunque, la risposta esatta è (a).

$$9. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + e^n)}{n + 2\sqrt{n} + 3}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + e^n)}{n + 2\sqrt{n} + 3} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + \log(1 + e^{-n})}{n + 2\sqrt{n} + 3} \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n + 2\sqrt{n} + 3} + \frac{\log(1 + e^{-n})}{n + 2\sqrt{n} + 3} \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n + 2\sqrt{n} + 3} \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{2}{\sqrt{n}} + 3} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

La risposta esatta è (b).

$$10. \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{\log(n)}{\log(n^2 + e^{-n})}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{\log(n)}{\log(n^2 + e^{-n})} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{\log(n)}{2 \log(\sqrt{n^2 + e^{-n}})} \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \left( \frac{\log(\sqrt{n^2 + e^{-n}})}{2 \log(\sqrt{n^2 + e^{-n}})} - \frac{\log\left(\sqrt{1 + \frac{e^{-n}}{n^2}}\right)}{2 \log(\sqrt{n^2 + e^{-n}})} \right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n.$$

Questo limite tuttavia non esiste, perché vale  $\frac{1}{2}$  per  $n$  pari e  $-\frac{1}{2}$  per  $n$  dispari.  
Dunque, la risposta esatta è (d).

$$11. \lim_{n \rightarrow +\infty} n^4 \left( \sqrt{1 + \frac{2}{n^4}} - 1 \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^4 \left( \sqrt{1 + \frac{2}{n^4}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^4 \frac{1 + \frac{2}{n^4} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2}{n^4}} + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1} = 1.$$

La risposta esatta è (b).

$$12. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(2^n + e^n + 2n^5)}{\log(3^n + n^5)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(2^n + e^n + 2n^5)}{\log(3^n + n^5)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \log\left(\left(\frac{2}{e}\right)^n + 1 + 2\frac{n^5}{e^n}\right)}{\log 3 + \log\left(1 + \frac{n^5}{3^n}\right)} = \frac{1}{\log 3}$$

La risposta esatta è (c).

$$13. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{2n + \sqrt{n^2 + 1}} \sin\left(e^{\frac{1}{n^2+n}} - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{2n + \sqrt{n^2 + 1}} \sin\left(e^{\frac{1}{n^2+n}} - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n^3}{2n + \sqrt{n^2 + 1}}}{\frac{1}{n^2}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(e^{\frac{1}{n^2+n}} - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(e^{\frac{1}{n^2+n}} - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{e^{\frac{1}{n^2+n}} - \cos\left(\frac{1}{n}\right)} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{n^2+n}} - \cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{1}{3} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{n^2+n}} - 1}{\frac{1}{n^2}} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{n^2+n}} - 1}{\frac{1}{n^2+n}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n^2+n}}{\frac{1}{n^2}} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

La risposta esatta è (b).

$$14. (-1)^{n+1} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log((n+3)!) - \log(n!)}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{n+1} \frac{\log((n+3)!) - \log(n!)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{n+1} \frac{\log\left(\frac{(n+3)!}{n!}\right)}{n}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{n+1} \frac{\log((n+3)(n+2)(n+1))}{n} \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{n+1} \left( \frac{\log(n+3)}{n} + \frac{\log(n+2)}{n} + \frac{\log(n+1)}{n} \right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato la proprietà fondamentale del fattoriale  $(n+3)! = (n+3)(n+2)! = (n+3)(n+2)(n+1)! = (n+3)(n+2)(n+1)n!$ .  
Dunque la risposta esatta è (a).

15.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 2^{1+\frac{1}{n}} - 3^{\frac{1}{n}} \right)^n$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 2^{1+\frac{1}{n}} - 3^{\frac{1}{n}} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \left( 1 + \left( 2^{1+\frac{1}{n}} - 3^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \right)^{\frac{1}{2^{1+\frac{1}{n}} - 3^{\frac{1}{n}} - 1}} \right)^{n \left( 2^{1+\frac{1}{n}} - 3^{\frac{1}{n}} - 1 \right)} \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \left( 2^{1+\frac{1}{n}} - 3^{\frac{1}{n}} - 1 \right)} \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{2n \left( 2^{\frac{1}{n}} - 1 \right) - n \left( 3^{\frac{1}{n}} - 1 \right)} \\
&= e^{2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}} \\
&= e^{2 \log 2 - \log 3} \\
&= \frac{4}{3},
\end{aligned}$$

dove è stato usato il limite notevole  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log(a)$  per  $a = 2, 3$ .  
Dunque la risposta esatta è (d).