

Soluzione del tutoraggio di Analisi Matematica I

A.A. 2016 – 2017 - Docente: Luca Battaglia

TUTORAGGIO 2 DEL 13 OTTOBRE 2016
ARGOMENTO: LIMITI

Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 + x}$

Moltiplicando e dividendo per $\sqrt{x^2 + 4x} + \sqrt{x^2 + x}$ si ottiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 + x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 + x} \frac{\sqrt{x^2 + 4x} + \sqrt{x^2 + x}}{\sqrt{x^2 + 4x} + \sqrt{x^2 + x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x - (x^2 + x)}{\sqrt{x^2 + 4x} + \sqrt{x^2 + x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 4x} + \sqrt{x^2 + x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{1 - (\cos(x^2))^2}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{1 - (\cos(x^2))^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{(1 - \cos(x^2))(1 + \cos(x^2))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2)^2}{1 - \cos(x^2)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos(x^2)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{(x^2)^2}} \\ &= 1, \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio è stato utilizzato il limite notevole $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(y)}{y^2} = \frac{1}{2}$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x)}{\arctan(3x)}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x)}{\arctan(3x)} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x)}{2x} \frac{3x}{\arctan(3x)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(2x)} \frac{\sin(2x)}{2x} \frac{\tan(\arctan(3x))}{\arctan(3x)} \\
&= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(2x)} \frac{\sin(2x)}{2x} \frac{1}{\cos(\arctan(3x))} \frac{\sin(\arctan(3x))}{\arctan(3x)} \\
&= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(2x)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(\arctan(3x))} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\arctan(3x))}{\arctan(3x)} \\
&= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\arctan(3x))}{\arctan(3x)} \\
&= \frac{2}{3},
\end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio segue dal limite notevole $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$.

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x \sin(x) + e^{\arctan(x)}}{3x^2 + x(\log(x))^2 + \cos(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x \sin(x) - 2e^{\arctan(x)}}{3x^2 + x(\log(x))^2 + \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{\sin(x)}{x} - \frac{e^{\arctan(x)}}{x^2}}{3 + \frac{(\log(x))^2}{x} + \frac{\cos(x)}{x}} = \frac{1}{3}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x \log(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x \log(x)} = e \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x \log(1 + (x-1))} = e \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} \frac{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x-1}}{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(1+(x-1))}{x-1}} = e \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = e,$$

dove abbiamo usato i limiti notevoli $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$.

$$6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} e^x = +\infty,$$

dove abbiamo usato il limite notevole $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{e^x - e^{-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + e^{-x} - 1}{e^x - 1 - (e^{-x} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - \frac{e^{-x} - 1}{-x}}{\frac{e^x - 1}{x} + \frac{e^{-x} - 1}{-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{2} = 0.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \frac{\frac{1}{\cos(x)} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \lim_{x \rightarrow 0} x = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x))^{\frac{1}{x}}$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x))^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\log\left((\cos(x))^{\frac{1}{x}}\right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\log(\cos(x))}{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\log(1+(\cos(x)-1))}{\cos(x)-1} \frac{1-\cos(x)}{x^2} (-x)} \\
 &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+(\cos(x)-1))}{\cos(x)-1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \lim_{x \rightarrow 0} (-x)} \\
 &= e^{\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} (-x)} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log\left(\frac{x+2}{x-3}\right)$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} x \log\left(\frac{x+2}{x-3}\right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \log\left(1 + \frac{5}{x-3}\right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 \frac{x-3}{5} \log\left(1 + \frac{5}{x-3}\right) + 3 \log\left(1 + \frac{5}{x-3}\right)\right) \\
 &= 5 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3}{5} \log\left(1 + \frac{5}{x-3}\right) + 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \log\left(1 + \frac{5}{x-3}\right) \\
 &= 5 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3}{5} \log\left(1 + \frac{5}{x-3}\right) \\
 &= 5,
 \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio è stato usato il limite notevole $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \log(1+y) = 1$.

11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sin(x) - \sqrt{x} + 3}{x + (\log(x))^5}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sin(x) - \sqrt{x} + 3}{x + (\log(x))^5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x) - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x}}{1 + \frac{(\log(x))^5}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x).$$

Quest'ultimo limite tuttavia non esiste, perché ad esempio $\sin(n\pi) = 0$ mentre $\sin\left(\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = 1$ per ogni intero n . Dunque, il limite di partenza non esiste.

12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{3^x + e^x \log(x) + x^2 2^x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{3^x + e^x \log(x) + x^2 2^x} = 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{1 + \left(\frac{e}{3}\right)^x \log(x) + x^2 \left(\frac{2}{3}\right)^x} = 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{1} = 3.$$