

Soluzioni del tutoraggio di Analisi Matematica I

A.A. 2016 – 2017 - Docente: Luca Battaglia

TUTORAGGIO 1 DEL 6 OTTOBRE 2016

ARGOMENTO: DISEQUAZIONI, INSIEMI DI DEFINIZIONE

Determinare l'insieme di definizione e il segno delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = x^5 - 2x^3 - 8x$

Innanzitutto, $f(x)$ è ben definita per ogni x reale. Poiché tutti gli addendi hanno il fattore x , possiamo scrivere

$$x(x^4 - 2x^2 - 8) < 0.$$

Per studiare il secondo fattore, applichiamo la sostituzione $y = x^2$ e consideriamo il polinomio $y^2 - 2y - 8$, che ha per zeri $y = -2$ e $y = 4$; dunque, la disequazione equivale a

$$x(x^2 + 2)(x^2 - 4) < 0,$$

che a sua volta si scompone in

$$x(x^2 + 2)(x - 2)(x + 2) < 0.$$

I segni dei vari fattori sono:

	$x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x < 2$	$x > 2$
x	-	-	+	+
$x^2 + 2$	+	+	+	+
$x - 2$	-	-	-	+
$x + 2$	-	+	+	+
$f(x)$	-	+	-	+

Dunque, $f(x) > 0$ per $-2 < x < 0$ e $x > 2$; $f(x) = 0$ per $x = -2, 0, 2$ e $f(x) < 0$ per $x < -2$ e $0 < x < 2$.

2. $f(x) = |x + 1| - |2x - 3|$

$f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Per studiarne il segno, consideriamo innanzi tutto le quantità all'interno dei moduli: per $x \geq \frac{3}{2}$ sono entrambe non-negative, per $x < -1$ sono entrambe negative mentre per $-1 \leq x < \frac{3}{2}$ abbiamo $2x - 3 < 0 \leq x + 1$.

Dunque, possiamo scrivere

$$f(x) = \begin{cases} -(x + 1) + (2x - 3) & \text{se } x < -1 \\ (x + 1) + (2x - 3) & \text{se } -1 \leq x < \frac{3}{2} \\ (x + 1) - (2x - 3) & \text{se } x \geq \frac{3}{2} \end{cases} = \begin{cases} x - 4 & \text{se } x < -1 \\ 3x - 2 & \text{se } -1 \leq x < \frac{3}{2} \\ 4 - x & \text{se } x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Vediamo cosa succede nei tre intervalli in cui varia la definizione di f .

Quando $x < -1$, $f(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq 4$, ma questo non è mai verificato quindi $f(x) < 0$

per $x < -1$.

Se $-1 \leq x < \frac{3}{2}$ allora $f(x) > 0$ quando $x > \frac{2}{3}$; dunque, $f(x) < 0$ per $-1 \leq x < \frac{2}{3}$, $f(x) = 0$ per $x = \frac{2}{3}$ e $f(x) > 0$ per $\frac{2}{3} < x < \frac{3}{2}$.

Infine, per $x \geq \frac{3}{2}$ abbiamo $f(x) > 0$ quando $x < 4$, quindi $f(x) < 0$ per $x > 4$, $f(x) = 0$ per $x = 4$ e $f(x) > 0$ per $x > 4$.

Riassumendo, $f(x)$ è positiva per $\frac{2}{3} < x < 4$, si annulla in $x = \frac{2}{3}$ e $x = 4$ ed è negativa per $x < \frac{2}{3}$ e $x > 4$.

3. $f(x) = \frac{1 - e^x}{x^6 - 7x^3 - 8}$

La funzione non è definita per le x che risolvono il polinomio al denominatore. Quest'ultimo diventa, scrivendo $y = x^3$, $y^2 - 7y - 8$, che ha per radici $y = -1$ e $y = 8$. Dunque, il denominatore di $f(x)$ vale 0 quando $x^3 = -1$ oppure $x^3 = 8$, quindi $f(x)$ non è definita in $x = -1$ e $x = 2$.

Per studiare il segno di f scriviamo il denominatore come $x^6 - 7x^3 - 8 = (x^3 + 1)(x^3 - 8)$ e studiamo il segno dei vari fattori:

	$x < -1$	$-2 < x < 0$	$0 < x < 2$	$x > 2$
$1 - e^x$	+	+	-	-
$x^3 + 1$	-	+	+	+
$x^3 - 8$	-	-	-	+
Numeratore	+	+	-	-
Denominatore	+	-	-	+
$f(x)$	+	-	+	-

Dunque $f(x) > 0$ per $x < -1$ e $0 < x < 2$, $f(x) = 0$ per $x = 0$ e $f(x) < 0$ per $-1 < x < 0$ e $x > 2$.

4. $f(x) = \sqrt{7 - e^x} - \sqrt{e^x - 2}$

La funzione è definita quando gli argomenti delle radici sono entrambi maggiori o uguali a 0, cioè $2 \leq e^x \leq 7$, ovvero $\log 2 \leq x \leq \log 7$.

$f(x) > 0$ equivale a

$$\sqrt{7 - e^x} > \sqrt{e^x - 2},$$

che equivale a richiedere la stessa disuguaglianza tra gli argomenti delle radici:

$$7 - e^x > e^x - 2.$$

Quest'ultima relazione si verifica per $e^x < \frac{9}{2}$, cioè $x < \log \frac{9}{2}$. Analogamente, $f(x) = 0$ per $x = \log \frac{9}{2}$ e $f(x) < 0$ per $x > \log \frac{9}{2}$.

Intersecando con l'insieme di definizione di $f(x)$ otteniamo $f(x) > 0$ per $\log 2 < x < \log \frac{9}{2}$,

$f(x) = 0$ per $x = \log \frac{9}{2}$ e $f(x) < 0$ per $\log \frac{9}{2} < x < \log 7$.

5. $f(x) = \sqrt{\frac{4 \cos(x)^3 - 3 \cos(x)}{2 + \sin(x)}}$

Affinché f sia definita bisogna imporre che l'argomento della radice non sia negativo e che il denominatore non sia nullo. Quest'ultimo però è sempre positivo, dal momento che $\sin(x) \geq -1$.

Le condizioni di esistenza equivalgono dunque alla non-negatività del numeratore, che si può fattorizzare come

$$4 \cos(x)^3 - 3 \cos(x) = 4 \cos(x) \left(\cos(x)^2 - \frac{3}{4} \right) = 4 \cos(x) \left(\cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Studiamo dunque il segno dei singoli fattori:

	$0 < x < \frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < \frac{5}{6}\pi$	$\frac{5}{6}\pi < x < \frac{7}{6}\pi$	$\frac{7}{6}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{2}\pi < x < \frac{11}{6}\pi$	$\frac{11}{6}\pi < x < 2\pi$
$\cos(x)$	+	+	-	-	-	+	+
$\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}$	+	-	-	-	-	-	+
$\cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}$	+	+	+	-	+	+	+
$f(x)$	+	-	+	-	+	-	+

$f(x)$ è dunque definita (considerando solo $0 \leq x < 2\pi$) per $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi$, $\frac{7}{6}\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$ e $\frac{11}{6}\pi \leq x < 2\pi$.

Quanto al segno, essendo f definita come una radice quadrata sarà sempre positiva fintanto che è ben definita, ad eccezione dei suoi zeri.

Nel nostro caso, $f(x) = 0$ per $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi$, dunque $f(x) > 0$ per $0 < x < \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{5}{6}\pi$, $\frac{7}{6}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$ e $\frac{11}{6}\pi < x < 2\pi$.

6. $f(x) = \log \left(\frac{x(x+2)(x+3)}{x^3-1} \right)$

Affinché f sia definita è necessario che il denominatore della frazione sia diverso da zero, che accade quando $x \neq 1$, e che l'argomento del logaritmo sia positivo. Il numeratore è già fattorizzato mentre il denominatore è positivo per $x > 1$, dunque possiamo studiarne i segni:

	$x < -3$	$-3 < x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
x	-	-	-	+	+
$x+2$	-	-	+	+	+
$x+3$	-	+	+	+	+
x^3-1	-	-	-	-	+
Numeratore	-	+	-	+	+
Denominatore	-	-	-	-	+
$\frac{x(x+2)(x+3)}{x^3-1}$	+	-	+	-	+

f è dunque definita per $x < -3$, $-2 < x < 0$ e $x > 1$.

Per studiare il segno di f , notiamo che è positiva se e solo se l'argomento del logaritmo è maggiore di 1:

$$\frac{x(x+2)(x+3)}{x^3-1} - 1 > 0.$$

Scrivendo il membro di sinistra come un'unica frazione e semplificando i termini si ottiene

$$\frac{5x^2 + 6x + 1}{x^3 - 1} > 0.$$

Il numeratore ha per zeri $x = -\frac{1}{5}$ e $x = -1$, dunque si fattorizza come $5x^2 + 6x + 1 = 5(x+1)\left(x + \frac{1}{5}\right)$. La situazione, fattore per fattore, è:

	$x < -3$	$-2 < x < -1$	$-1 < x < -\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5} < x < 0$	$x > 1$
$x + 1$	-	-	+	+	+
$x + \frac{1}{5}$	-	-	-	+	+
$x^3 - 1$	-	-	-	-	+
Numeratore	+	+	-	+	+
Denominatore	-	-	-	-	+
$\frac{x(x+2)(x+3)}{x^3-1} - 1$	-	-	+	-	+

$f(x)$ è dunque positiva per $-1 < x < -\frac{1}{5}$ e $x > 1$, si annulla per $x = -1$ e $x = -\frac{1}{5}$ ed è negativa per $x < -3$, $-2 < x < -1$ e $-\frac{1}{5} < x < 0$.