$$\ell_2 = \Big\{ x : \boxed{\mathbb{N}} \to \mathbb{R},\ k \to x(k) \ : \ \sum_{k=1}^{\infty} x(k)^2 < +\infty \Big\} = L^2(\mathbb{N}, \#)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} x(k)^2 = \int x \, d\#$$

$\#$ = MISURA DEL CONTEGGIO SU $\mathbb{N}$ $\boxed{\mathbb{N}}$

$$\int_A x^2(k)\, d\#(k) = \sum_{k\in A} x^2(k)$$

ALLO STESSO MODO, $L^2(X, \#)$, X QUALSIASI

$$\sum_{k\in A} \underline{x(k)}^2 \overset{DEF}{=} +\infty$$

SE A È PIÙ CHE NUMERABILE

STASERA: I FOGLIO DI ESERCIZI (1° DI 3) HILBERT, HAHN-BANACH

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ ℓ_1 NON È RIFLESSIVO, CIOÈ IL DUALE DI ℓ_∞ CONTIENE ELEMENTI CHE NON SONO DEL TIPO $L: x \longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x(k)y(k)$ PER $y \in \ell_1$.

$c = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \exists \lim_{k\to\infty} x(k) \neq \pm\infty\}$ "SUCCESSIONI CON LIMITE FINITO"

$L : c \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow \lim_{k\to\infty} x(k)$ LINEARE, CONTINUO $\Rightarrow$ ESTENDO A $\tilde{L} \in \ell_\infty^*$. $\tilde{L}$ NON CORRISPONDE A NESSUN $y \in \ell_1$. SE COSÌ FOSSE,

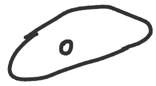
$$\tilde{L}x = \sum_{k=1}^{\infty} \underline{x(k)}\, y(k)$$

SCELGO $x = e_n = (0\ldots 0, \underset{n}{1}, 0 \ldots)$ $\quad 0 = Le_n = \tilde{L} e_n = y(n)$

SCELGO $x = (1, \ldots, 1 \ldots)$ $\quad 1 = Lx = \tilde{L}x = \sum_{k=1}^{\infty} y(k)$

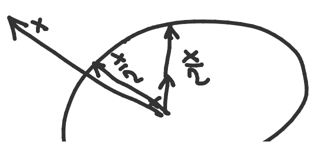
$y(n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{\infty} y(k) = 1$ IMPOSSIBILE.

$P(x)$ OMOGENEO E SUBADDITIVO

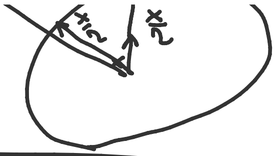


$\boxed{\text{DEFINIZIONE}}$ SIA X SP. NORMATO E $K \subset X$ CONVESSO CONTENENTE $B_\delta(0)$ PER QUALCHE $\delta > 0$. IL <u>FUNZIONALE DI MINKOWSKI</u> DI K È

$$\underline{P_K(x) = \inf\{\lambda > 0 : \tfrac{x}{\lambda} \in K\}}$$

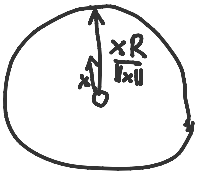


$P_K(x)$ È IL RAPPORTO TRA LA LUNGHEZZA DEI VETTORI

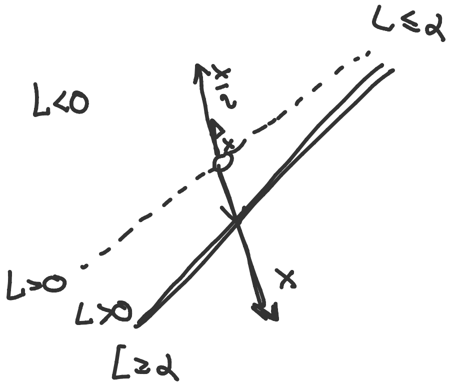


... RAPPORTO TRA LA LUNGHEZZA DEI VETTORI

ESEMPI ① $K=B_R(0)$



$p_K(x)=\frac{\|x\|}{R}$



② $K=\{x\in X: Lx<\alpha\}$ PER $L\in X^*$, $\alpha>0$

$$p_K(x)=\begin{cases}0 & Lx<0\\ \frac{Lx}{\alpha} & Lx\geq 0\end{cases}$$

$$\frac{Lx}{r}=L\left(\frac{x}{r}\right)=\alpha \qquad r=\frac{Lx}{\alpha}$$

LEMMA SIA X SP. NORMATO, $K\subset X$ CONVESSO $B_\delta(0)\subset K$, $p_K(x)$ VERIFICA:

1. p_K È OMOGENEO, SUBADDITIVO
2. $\exists C>0: p_K(x)\leq C\|x\|\ \forall x$, E p_K È CONTINUA
3. SE $K\subset K'$ ALLORA $p_{K'}\leq p_K$
4. $p_K=p_{\bar{K}}=p_{\mathring{K}}$, INOLTRE $p_K(x)\begin{cases}<1 & \text{SE } x\in \mathring{K}\\ =1 & \text{SE } x\in\partial K\\ >1 & \text{SE } x\notin \bar{K}\end{cases}$
5. SE K È BILANCIATO ($x\in K \iff -x\in K$) ALLORA p_K È SEMINORMA
6. SE K È BILANCIATO E LIMITATO ALLORA p_K È UNA NORMA (EQUIVALENTE A $\|\cdot\|$)

---

① VERIFICO CHE $p_K(x)<+\infty$: SE $x=0$, $p_K(x)=0$

SE $x\neq 0$, FACCIO VEDERE CHE $\frac{x}{r}\in K$ PER QUALCHE $r>0$ ($\Rightarrow p_K(x)\leq r<+\infty$)

$\frac{\delta x}{2\|x\|}$ HA NORMA $=\frac{\delta}{2}$ $\Rightarrow \in B_\delta(0)\subset K$ $\Rightarrow$ PRENDO $r=\frac{2}{\delta}\|x\|$

OMOGENEITÀ: $\lambda>0$: $p_K(\lambda x)=\inf\{r>0: \frac{\lambda x}{r}\in K\}=\inf\{r>0: \frac{x}{\frac{r}{\lambda}}\in K\}=$

$$=\inf\{\lambda s>0: \frac{x}{s}\in K\}=\lambda p_K(x) \qquad \frac{r}{\lambda}=s$$

SUBADDITIVITÀ: DATI x,y DATO $\varepsilon>0$ $\exists\, r,s$ TALI CHE $\frac{x}{r},\frac{y}{s}\in K$, $p_K(x)\geq r-\varepsilon$ (*), $p_K(y)\geq s-\varepsilon$

$\frac{x+y}{\ldots}=\frac{r}{\ldots}\frac{x}{r}+\frac{s}{\ldots}\frac{y}{s}\in K$ ...

... DATO $\varepsilon>0$ $\exists\, r,s$ TALI CHE $\frac{x}{r}, \frac{y}{s} \in k$, $P_k(x) \geq r-\varepsilon$, $P_k(y) \geq s-\varepsilon$

$$\frac{x+y}{r+s} = \underbrace{\frac{r}{r+s}\,\overbrace{\frac{x}{r}}^{\in k} + \frac{s}{r+s}\,\overbrace{\frac{y}{s}}^{\in k}}_{\text{COMB. CONVESSA}} \in k \text{ CONVESSO}$$

$$P_k(x+y) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{DEF. DI INF}}}{\leq} r+s \leq P_k(x)+P_k(y)+2\varepsilon$$, ε ARBITRARIO $\Rightarrow P_k(x+y) \leq P_k(x)+P_k(y)$

② $P_k(x) \leq \frac{2}{\delta}\|x\|$ SEGUE DAL PUNTO PRECEDENTE $\Rightarrow$ PRENDO $C=\frac{2}{\delta}$

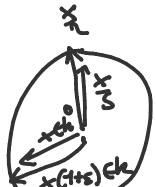
$P(x)-P(y) \leq P(x-y) \leq C\|x-y\|$, ALLO STESSO MODO $P(y)-P(x) \leq C\|y-x\|$

$x=(x-y)+y$

$\Rightarrow |P(x)-P(y)| \leq C\|x-y\|$ CIOÈ P È LIPSCHITZ CONTINUA

③ $k \subset k'$ $\Rightarrow$ SE $\frac{x}{r} \in k$ ALLORA $\frac{x}{r} \in k'$ $\Rightarrow \{r: \frac{x}{r} \in k\} \subset \{r: \frac{x}{r} \in k'\}$

$P_{k'}$ È L'INF DI UN INSIEME PIÙ GRANDE $\Rightarrow P_{k'} \leq P_k$

④ 

$\frac{x}{r} \in \bar{k} \Leftrightarrow \frac{x}{s} \in \mathring{k}$ $\forall s>r$ (PERCHÉ k CONVESSO)

$P_{\bar{k}}(x) = \inf\{r>0: \frac{x}{r} \in \bar{k}\} = \inf\{s>0: \frac{x}{s} \in \mathring{k}\} = P_{\mathring{k}}(x)$

$\mathring{k} \subset k \subset \bar{k}$ $\overset{③}{\Rightarrow}$ $P_{\bar{k}} \leq P_k \leq P_{\mathring{k}} = P_{\bar{k}}$ $\Rightarrow$ TUTTE E 3 UGUALI

$x \in \mathring{k} \Leftrightarrow (1+\varepsilon)x \in k$ (PER QUALCHE $\varepsilon>0$) $\Leftrightarrow P_k(x)<1$ $\quad$ ($r=\frac{1}{1+\varepsilon}$ NELLA DEF.)

$x \in \bar{k} \Leftrightarrow (1-\varepsilon)x \in k$ ($r=\frac{1}{1-\varepsilon}$ NELLA DEF.) $\Leftrightarrow P_k(x) \leq 1$

ε VICINO A 0

⑤ SE k BILANCIATO ($x \in k \Leftrightarrow -x \in k$) ALLORA $P_k(x) = P_k(-x)$

$\Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}$, $P_k(\lambda x) = P_k(|\lambda| x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{OMOGENEITÀ}}}{=} |\lambda|\, P_k(x)$, $P_k \geq 0$ PER DEFINIZIONE

$\Rightarrow P_k$ SEMINORMA

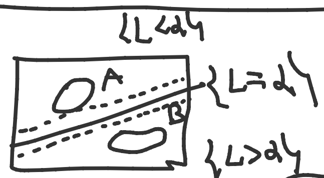
⑥ SE k È ANCHE LIMITATO, $\|x\| > \operatorname{diam} k \Rightarrow x \notin k$

CIOÈ $r < \frac{\|x\|}{\operatorname{diam} k} \Rightarrow \frac{x}{r} \notin k \Rightarrow P_k(x) \geq \frac{\|x\|}{\operatorname{diam} k} > 0 \Rightarrow$ NORMA

DA ② $P_k(x) \leq C\|x\|$ $\Rightarrow$ EQUIVALENTI

11.1.24 $\quad$ DEFINIZIONE UN SOTTOINSIEME $H \subset X$ ...

DA (2) $P_n(x) \le C\|x\| \Rightarrow$ EQUIVALENTI



$\boxed{\text{DEFINIZIONE}}$ UN SOTTOINSIEME $H \subset X$ DI UNO SP. NORMATO SI CHIAMA IPERPIANO CHIUSO SE È DEL TIPO

$L \neq 0$ $\quad H = \{L = \alpha\} = \{x \in X : Lx = \alpha\}$ PER QUALCHE $L \in X^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$

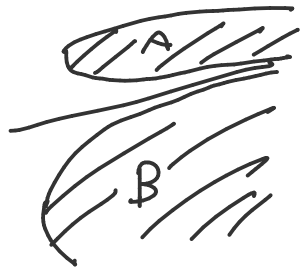
DUE SOTTOINSIEMI $A, B \subset X$ SI DICONO SEPARATI DA $\{L = \alpha\}$ SE

$Lx \le \alpha \ \forall x \in A$, $Lx \ge \alpha \ \forall x \in B$ $\quad$ CIOÈ $\sup_A L \le \inf_B L$

$A, B \subset X$ SI DICONO STRETTAMENTE SEPARATI SE $\sup_A L < \inf_B L$

CIOÈ $\exists \varepsilon > 0 : Lx \le \alpha - \varepsilon \ \forall x \in A$, $Lx \ge \alpha + \varepsilon \ \forall x \in B$

(È PIÙ FORTE DI $\underset{x \in A}{Lx < \alpha}$, $\underset{x \in B}{Lx > \alpha}$: POTREBBE SUCCEDERE



$\boxed{\text{PROPOSIZIONE}}$ UN FUNZIONALE LINEARE $L : X \to \mathbb{R}$ È CONTINUO $\Leftrightarrow$ $\ker L = \{L = 0\}$ È CHIUSO

SE L NON È CONTINUO, $\ker L$ È DENSO IN X

DIM| $(\Rightarrow)$ $\ker L = L^{-1}(\{0\})$ $\quad \{0\}$ CHIUSO, L CONTINUA $\Rightarrow$ PREIMMAGINE DI UN CHIUSO È CHIUSA

$(\Leftarrow)$ SE L NON È CONTINUO, $\exists \{x_n\} : \|x_n\| = 1$, $Lx_n \to +\infty$

PRENDO $y \in X$, CERCO $y_n \in \ker L : y_n \to y$

$$y_n := y - \frac{Ly}{Lx_n} x_n \quad \Rightarrow \quad Ly_n = Ly - \frac{Ly}{\cancel{Lx_n}} \cancel{Lx_n} = 0 \Rightarrow y_n \in \ker L$$

$$\|y - y_n\| = \frac{|Ly|}{\underbrace{|Lx_n|}_{\to \infty}} \underbrace{\|x_n\|}_{=1} \to 0 \quad \text{CIOÈ } y_n \to y$$

$\Rightarrow$ DENSO