OPERATORE RISOLVENTE DI $\begin{cases} (-pu')' + qu = f & \text{SU } (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$ ⊛

$L^2 \ni f \longrightarrow u \in W_0^{1,2}$

DEF SIA $p \in L^\infty((a,b))$ $p \geq \delta > 0$, $q \in L^1((a,b))$ $q \geq 0$, $f \in L^2((a,b))$, L'OPERATORE RISOLVENTE DEL PROBLEMA ⊛ È $A: L^2((a,b)) \longrightarrow L^2((a,b))$ DEFINITO DA $A = i \circ \tilde{A}$, DOVE $i: W_0^{1,2} \hookrightarrow L^2$ È L'INCLUSIONE,

$\tilde{A}: L^2 \longrightarrow W_0^{1,2}$
$f \longmapsto u$ SOL. DI ⊛

$$\begin{tikzcd} L^2 \arrow[r, "\tilde{A}"] \arrow[rr, bend right, "A"'] & W_0^{1,2} \arrow[r, "i"] & L^2 \end{tikzcd}$$

PROP L'OPERATORE RISOLVENTE È COMPATTO, INIETTIVO, SIMMETRICO $\boxed{(Af,g)_{L^2} = (f,Ag)_{L^2}}$ $\forall f,g \in L^2$, DEFINITO POSITIVO $(Af,f) > 0$ $\forall f \neq 0$

DIM. $\tilde{A}$ BEN DEF. PER IL TEO. ESISTENZA E UNICITÀ. $\tilde{A}$ INIETTIVO PER LA UNICITÀ DELLA DERIVATA DEBOLE. $\Rightarrow$ ANCHE A È BEN DEF. E INIETTIVO.

COMPATTEZZA: i È COMPATTA PER IL TEO. DI IMMERSIONE. $\Rightarrow$ BASTA FAR VEDERE CHE $\tilde{A}$ È CONTINUO E $A = i \circ \tilde{A}$ SARÀ COMPATTO:

CHIAMO $u = \tilde{A}f$, VOGLIO AVERE $\|u\|_{W_0^{1,2}} \leq C\|f\|_{L^2}$

$$\|u\|^2_{W_0^{1,2}} = \underbrace{\int_a^b pu'^2 + qu^2 = \int_a^b fu}_{} \leq \|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2} \underset{\text{POINCARÉ}}{\leq} C\|f\|_{L^2}\|u\|_{W_0^{1,2}}$$

$u = v$

$\int pu'v' + quv = \int fv$

$\Downarrow$

$\|u\|_{W_0^{1,2}} \leq C\|f\|_{L^2}$

SIMMETRIA: $u = \tilde{A}f$, $v = \tilde{A}g$ $\Rightarrow$ $(Af,g)_{L^2} = \int ug$, $(f,Ag)_{L^2} = \int vf$

DEVO FAR VEDERE $\int ug = \int vf$

$$\int ug = \int pv'u' + qvu = \int fv.$$

$\int pv'\varphi' + qv\varphi = \int g\varphi$

$\int p v' \varphi' + q v \varphi = \int g \varphi$
SCELGO $\varphi = v$

<u>POSITIVITÀ</u>: $(Af, f)_{L^2} = \int u f$, DEVO FAR VEDERE $\int u f > 0$ SE $f \neq 0$

MA $\int u f = \int p u'^2 + q u^2 = \|u\|^2_{W_0^{1,2}}$ SE $f \neq 0$, $u \neq 0 \Rightarrow \|u\|^2 > 0$.

OSS POTEVAMO CONSIDERARE $\tilde{A}$ RISTRETTO A $W_0^{1,2}$ $\tilde{A}: W_0^{1,2} \to W_0^{1,2}$

$\tilde{A}|_{W_0^{1,2}}$ HA LE STESSE PROPRIETÀ: <u>COMPATTO</u>, <u>SIMMETRICO</u>, DEF. POSITIVO

$(u,v)_{W_0^{1,2}} = \int p u' v' + q u v$. $\quad (\tilde{A}u, v)_{W_0^{1,2}} = (u, \tilde{A}v)_{W_0^{1,2}}$ $\quad (\tilde{A}u, u)_{W_0^{1,2}} > 0$

TEORIA SPETTRALE

LAVORIAMO SU SPAZI COMPLESSI (È PIÙ FACILE TROVARE AUTOVALORI)

DEF SIA X SP. VETT. COMPLESSO. UNA <u>NORMA</u> È $\|\cdot\|: X \to [0, +\infty)$ TALE CHE:

$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\forall x, y \in X$, $\|\lambda x\| = \underbrace{|\lambda|}_{\text{MODULO COMPLESSO}} \|x\|$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}, x \in X$, $\|x\| > 0$ $\forall x \neq 0$

SE $(X, \|\cdot\|)$ È SP. METRICO COMPLETO, X È UN <u>BANACH COMPLESSO</u>

UN <u>PRODOTTO HERMITIANO</u> SU X SP. VETT. COMPLESSO È $(\,,\,): X \times X \to \mathbb{C}$ TALE CHE:

- $(x,y) = \overline{(y,x)}$ $\forall x, y \in X$

  $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha (x,z) + \beta (y,z)$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ $\forall x, y, z \in X$

  $(x,x) \in \mathbb{R}_{>0}$ $\forall x \neq 0$

SE X È COMPLETO RISPETTO ALLA NORMA $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$ ALLORA X SI CHIAMA <u>HILBERT COMPLESSO</u>

ESEMPI

$L^p(\mu)$, C^k, $W^{1,p}$ SONO SPAZI DI BANACH COMPLESSI SE $f: [a,b] \to \mathbb{C}$

$\|f\|_{L^p} = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ ($|\cdot|$: MODULO COMPLESSO)

$L^2(\mu)$ È UNO SPAZIO DI HILBERT COMPLESSO CON $(f,g) = \int f \bar{g} \, d\mu$

OSS ① IL PRODOTTO HERMITIANO <u>NON</u> È LINEARE NELLA 2° VARIABILE:

$(x, \alpha y + \beta z) = \bar{\alpha}(x,y) + \bar{\beta}(x,z)$.

② L'IDENTITÀ DI POLARIZZAZIONE SUGLI HILBERT COMPLESSI È:

$$(x,y) = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} + i\,\frac{\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2}{4}$$

CAUCHY-SCHWARTZ, PITAGORA, REGOLA D. PARALLELOGRAMMA VALGONO NELLA STESSA FORMA DEGLI HILBERT REALI.

PROSSIME LEZIONI: MAR 18/5, VEN 21/5, VEN 28/5, MAR 1/6

NO LEZIONE MAR 25/5.

$A - \lambda I \in \mathcal{L}(X)$ È INVERTIBILE? INIETTIVO? SURIETTIVO?

$\boxed{\text{DEF.}}$ SIA X BANACH COMPLESSO, $A \in \mathcal{L}(X)$ DATO, $I \in \mathcal{L}(X)$ L'IDENTITÀ $\lambda \in \mathbb{C}$ DATO.
DICO CHE λ È NELLO SPETTRO DI A SE $A - \lambda I$ NON È INVERTIBILE.

NOTAZIONE: $\lambda \in \sigma(A)$

- SE $A - \lambda I$ NON È INIETTIVO, DICO CHE λ È AUTOVALORE E APPARTIENE ALLO SPETTRO PUNTUALE $\sigma_p(A)$. $\ker(A - \lambda I)$ SI CHIAMA AUTOSPAZIO
$0 \neq x \in \ker(A - \lambda I)$ SI CHIAMA AUTOVETTORE
- SE $A - \lambda I$ È INIETTIVO, $\mathrm{ran}(A - \lambda I) \subsetneq X$ ED È DENSO, DICO CHE λ È NELLO SPETTRO CONTINUO $\sigma_c(A)$
- SE $A - \lambda I$ È INIETTIVO, $\mathrm{ran}(A - \lambda I)$ NON È DENSO, λ È NELLO SPETTRO RESIDUO $\sigma_r(A)$

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \underbrace{\sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)}_{\text{NOVITÀ}}$$

$\boxed{\text{OSS}}$ SICCOME X È BANACH, SE $A - \lambda I$ È INVERTIBILE, L'INVERSO È CONTINUO (COROLLARIO DEL TEO. MAPPA APERTA)

$\boxed{\text{ESEMPI}}$ ① $A: \ell_2 \to \ell_2$ SHIFT SINISTRO $\quad \lambda = 0 \in \sigma_p(A)$ AUTOVALORE

$(x(1), x(2), \dots) \to (x(2), x(3), \dots)$ $\quad \ker(A - \lambda I) = \ker(A) = \mathrm{SPAN}(e_1)$

② $A: \ell_2 \to \ell_2$ SHIFT DESTRO $\quad \lambda = 0 \in \sigma_r(A)$ SP. RESIDUO

② $A: \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ SHIFT DESTRO $\quad \lambda = 0 \in \sigma_r(A)$ SP. RESIDUO

$(x(1), x(2), \dots) \to (0, x(1), x(2), \dots)$ $\quad A$ È INIETTIVO: $Ax=0 \Rightarrow \begin{matrix} x(1)=0 \\ x(2)=0 \end{matrix} \Rightarrow x=0$

$\mathrm{ran}(A) = e_1^{\perp} = \{x(1)=0\}$ NON È DENSO

③ $A: \ell_2 \to \ell_2$ $\quad \lambda = 0 \in \sigma_c(A)$ SPETTRO CONTINUO.

$(x(1), x(2), \dots) \to \left(x(1), \frac{x(2)}{2}, \frac{x(3)}{3}, \dots\right)$ $\quad A$ È INIETTIVO. $\underset{\not\ni \, (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)}{\mathrm{ran}(A)} \subsetneq \ell_2$

MA $\mathrm{ran}(A) \supset \mathrm{SPAN}\{e_k\}$ CHE È DENSO (GIÀ VISTO)

PROPOSIZIONE SE $A \in \mathcal{L}(X)$ CON X BANACH COMPLESSO ALLORA:

① SE $|\lambda| > \|A\|$ ALLORA $\lambda \notin \sigma(A)$

② SE A È INVERTIBILE E $\|B-A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ ALLORA B È INVERTIBILE

③ SE $\lambda \notin \sigma(A)$ E $|\mu - \lambda| < \frac{1}{\|(A-\lambda I)^{-1}\|}$ ALLORA $\mu \notin \sigma(A)$.

COROLLARIO

$\sigma(A) \subset \mathbb{C}$ È COMPATTO (LIMITATO PER ①, CHIUSO PER ③)

GLI OP. INVERTIBILI SONO APERTI IN $\mathcal{L}(X)$.

OSS IN DIM. FINITA, GLI INVERTIBILI SONO APERTI PERCHÉ SONO LE MATRICI PER CUI IL DETERMINANTE (FUNZ. CONTINUA) NON SI ANNULLA:

$$GL_N(\mathbb{C}) = \underset{\text{CONTINUA}}{\det}^{-1}(\underset{\text{APERTO}}{\mathbb{C} \setminus \{0\}})$$

DIM INVERTIAMO ESPLICITAMENTE $(A - \lambda I)$ PER $|\lambda| > \|A\|$

$$a \in \mathbb{C} \qquad (a-\lambda)^{-1} = \frac{1}{a-\lambda} = -\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{\lambda}}\right) = -\frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^k \quad \text{SE } \left|\frac{a}{\lambda}\right| < 1.$$

FACCIAMO VEDERE CHE $(A - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^k}$.

LA SERIE CONVERGE PERCHÉ È CAUCHY:

$$\left\| -\frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{\lambda^k} - \left(-\frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{M} \frac{A^k}{\lambda^k}\right) \right\| = \frac{1}{|\lambda|} \left\| \sum^{M} \frac{A^k}{\lambda^k} \right\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \sum^{M} \left(\frac{\|A\|}{|\lambda|}\right)^k$$

CODA DI UNA SERIE NUMERICA, GEOMETRICA

$\left\| -\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{M}\frac{A^k}{\lambda^k} - \left(-\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{N}\frac{A^k}{\lambda^k}\right)\right\| = \frac{1}{|\lambda|}\left\|\sum_{k=N+1}^{M}\frac{A^k}{\lambda^k}\right\| \le \frac{1}{|\lambda|}\sum_{k=N+1}^{M}\underbrace{\left(\frac{\|A\|}{|\lambda|}\right)^k}_{<1}$

$\|A^k\| \le \|A\|^k$

CODA DI UNA SERIE NUMERICA, GEOMETRICA DI RAGIONE $\frac{\|A\|}{|\lambda|} < 1$ $\to 0$

FACCIO VEDERE CHE È L'INVERSA:

$$(A-\lambda I)\left(-\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\lambda^k}\right) = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^{k+1}}{\lambda^{k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\lambda^k} = \frac{A^0}{\lambda^0} = I.$$

(2) $\|B-A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$

$$\|A^{-1}B - I\| = \|A^{-1}(B-A)\| \le \|A^{-1}\|\,\|B-A\| < 1 = |-1| \quad (= |\lambda|)$$

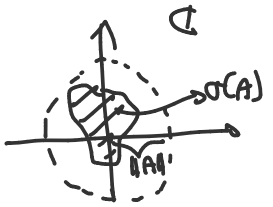
$|\lambda| > \|A^{-1}B - I\| \Rightarrow -1 \notin \sigma(A^{-1}B - I)$ CIOÈ $A^{-1}B$ È INVERTIBILE

$\left.\begin{array}{l} A^{-1}B \text{ INVERTIBILE} \\ A \text{ INVERTIBILE}\end{array}\right\} \Rightarrow B$ INVERTIBILE.

(3) APPLICO (2) CON $A-\lambda I$, $A-\mu I$: $\lambda \notin \sigma(A) \Rightarrow A-\lambda I$ INVERTIBILE

$$\|(A-\mu I)-(A-\lambda I)\| = |\mu-\lambda| < \frac{1}{\|(A-\lambda I)^{-1}\|} \overset{(2)}{\Longrightarrow} A-\mu I \text{ È INVERTIBILE}$$

CIOÈ $\mu \notin \sigma(A)$



ESEMPI (1) $\ell_2 \xrightarrow{A} \ell_2$

$(x(1), x(2), \dots) \mapsto \left(x(1), \frac{x(2)}{2}, \frac{x(3)}{3}, \dots\right)$

GIÀ SAPPIAMO $0 \in \sigma_c(A)$.

CERCHIAMO GLI AUTOVALORI:

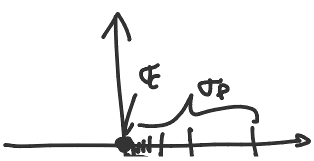
$Ax = \lambda x \iff \begin{array}{l} x(1) = \lambda x(1) \\ \frac{x(2)}{2} = \lambda x(2) \\ \dots \end{array}$

GLI AUTOVALORI SONO $\lambda = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$

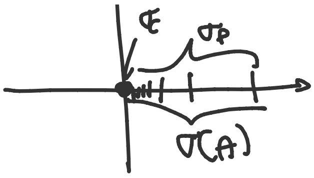
FACCIO VEDERE CHE $\sigma(A) = \{\frac{1}{k}\} \cup \{0\}$: SE $\lambda \neq \frac{1}{k}, 0$, INVERTO $(A-\lambda I)$:

$(A-\lambda I)x = y \iff \frac{x(k)}{k} - \lambda x(k) = y(k)$ $\forall k$, CIOÈ $x(k) = \frac{k}{1-\lambda k}\, y(k)$

$(A-\lambda I)^{-1}: y(k) \longrightarrow \frac{k}{1-\lambda k}\, y(k)$ BEN DEFINITO PERCHÉ $\frac{k}{1-\lambda k} \in \ell_\infty$.



[illegible] $A =$ SHIFT DESTRA/SINISTRA



PROSSIMO EPISODIO! A = SHIFT DESTRO/SINISTRO

$\sigma(A) = \{|\lambda| \leq 1\}$ DISCO INTERO