PROPOSIZIONE SE $A \in \mathcal{L}(X)$ È AUTOAGGIUNTO, ALLORA:

V ① $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$

V ② $\sigma_2(A) = \emptyset$

V ③ GLI AUTOVETTORI SONO ORTOGONALI

V ④ $\sigma(A) \subset [m, M]$ $\quad m = \inf\limits_{\|x\|=1} (Ax, x)$, $M = \sup\limits_{\|x\|=1} (Ax, x)$

⑤ $m, M \in \sigma(A) \Rightarrow \rho(A) = \max\{|m|, |M|\} = \sup\limits_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$

⑥ $\|A\| = \rho(A)$

DIM ⑤ CONSIDERO SOLO M PERCHÈ PER m SI RAGIONA ALLO STESSO MODO.

$\exists \{x_n\}$ TALE CHE $\|x_n\| = 1$ E $(Ax_n, x_n) \longrightarrow M$. VOGLIO DIMOSTRARE CHE

$\|Mx_n - Ax_n\| \longrightarrow 0.$ DA QUESTO SEGUE $M \in \sigma(A)$ PERCHÈ SE FOSSE

$A - MI$ INVERTIBILE, ALLORA $\|x_n\| = \|(A - MI)^{-1}(Ax_n - Mx_n)\| \leq \underbrace{\|(A-MI)^{-1}\|}_{\leq C} \underbrace{\|Ax_n - Mx_n\|}_{\to 0}$

IN CONTRADDIZIONE CON $\|x_n\| = 1$

$$(Mx - Ax, x) = \|x\|^2 \left(M - \frac{(Ax, x)}{\|x\|^2}\right) \geq 0 \quad \text{PER DEF. DI } M$$

$$x = y - x_n \frac{(My - Ay, x_n)}{(Mx_n - Ax_n, x_n)} \quad \forall y \in X \Rightarrow 0 \leq (Mx - Ax, x) = (My - Ay, y) - \frac{|(Mx_n - Ax_n, y)|^2}{(Mx_n - Ax_n, x_n)}$$

$$|(Mx_n - Ax_n, y)|^2 \leq (My - Ay, y)(Mx_n - Ax_n, x_n)$$

PASSO AL SUP TRA GLI y CON $\|y\| \leq 1$

$$\|Mx_n - Ax_n\|^2 \leq \sup_{\|y\| \leq 1} (My - Ay, y)\,(Mx_n - Ax_n, x_n) \leq \underbrace{\sup_{\|y\| \leq 1} \|My - Ay\| \underbrace{\|y\|}_{\leq 1}}_{\leq \|M - A\| \leq C} \underbrace{(Mx_n - Ax_n, x_n)}_{\to 0}$$

PER LA SCELTA DI x_n

$\Rightarrow \|Mx_n - Ax_n\| \longrightarrow 0.$

⑥ BASTA DIMOSTRARE CHE $\|A\| \leq \rho(A) = \max\{|m|, |M|\} = \mu$ ⊛

$(A(x+y), x+y) = (Ax + Ay, \ldots$

BASTA DIMOSTRARE CHE $\|A\| \leq \rho(A) = \max\{|m|,|M|\} = \mu$ (*)

$$(A(x+y),x+y) = (Ax+Ay,x)+(Ax+Ay,y) = (Ax,x)+(Ax,y)+(Ax,y)+(Ay,y)$$
$$(A(x-y),x-y) = (Ax-Ay,x)+(Ax-Ay,y) = (Ax,x)-(Ax,y)-(Ax,y)+(Ay,y)$$

$$\Rightarrow 4\mathrm{Re}(Ax,y) = (A(x+y),x+y)-(A(x-y),x-y) \qquad \forall x,y\in X$$
$$\leq M\|x+y\|^2 - m\|x-y\|^2$$
$$\leq \mu\left(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2\right)$$

REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA $\rightarrow \leq 2\mu\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$

SCELGO x PER CUI $Ax\neq 0$ (POSSO FARLO SE $A\neq 0$, SE $A=0$ ALLORA (*) È OVVIA)

SCELGO $y = Ax\dfrac{\|x\|}{\|Ax\|} \Rightarrow \cancel{4}\|Ax\|\,\cancel{\|x\|} \leq \cancel{4}\mu\|x\|^{\cancel{2}} \Rightarrow \|Ax\|\leq\mu\|x\|$
(OK ANCHE SE $Ax=0$)

PASSO AL SUP $\Rightarrow \|A\|\leq\mu$.

TEOREMA SPETTRALE PER OPERATORI AUTOAGGIUNTI COMPATTI

SIA H SPAZIO DI HILBERT COMPLESSO E $A\in K(X)$ AUTOAGGIUNTO.
ALLORA $\exists\,\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (SUCCESSIONE) OPPURE $\{\lambda_1\dots\lambda_N\}$ (INSIEME FINITO) E, PER OGNI λ_n, UN SOTTOSPAZIO FINITO-DIMENSIONALE $K(\lambda_n)$ TALI CHE:

1. $\sigma(A) = \{\lambda_n\}\cup\{0\}$
2. $\lambda_n\in\mathbb{R}$, $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (SE INFINITI)
3. λ_n SONO AUTOVALORI E $A|_{K(\lambda_n)} = \lambda_n I$ ($K(\lambda_n)$ È AUTOSPAZIO)
4. $K(\lambda_n)\perp K(\lambda_m)\perp \ker(A)$ $\forall n,m$
5. $H = \overline{\mathrm{span}}\{K(\lambda_n)\}\oplus\ker(A)$

$\boxed{\text{COROLLARIO}}$ 1) SE $A\in K(X)$ AUTOAGGIUNTO, $\exists\,\{e_\alpha\}$ SISTEMA ORTONORMALE COMPLETO PER A FATTO DA AUTOVETTORI (CHE "DIAGONALIZZA" A). BASTA PRENDERE

...

... $\exists \{e_\alpha\}$ SISTEMA ORTONORMALE COMPLETO PER A FATTO DA AUTOVETTORI (CHE "DIAGONALIZZA" A). BASTA PRENDERE SU $\ker(A)$ E SU CIASCUN $k(\lambda_n)$ UN SISTEMA ORTONORMALE COMPLETO E UNIRE.

$$A: \; x = \sum_\alpha \underbrace{c_\alpha}_{(x,e_\alpha)} e_\alpha \longrightarrow \sum_\alpha \lambda_\alpha c_\alpha e_\alpha$$ SCRITTURA "COMODA" PER A

SE X È SEPARABILE, CIOÈ $\{e_\alpha\}$ NUMERABILI, $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

SE X NON È SEPARABILE, CIOÈ $\{e_\alpha\}$ PIÙ CHE NUMERABILI, $\lambda_\alpha \neq 0$ SOLO PER NUMERABILI α

(2) $Ax - \lambda x = y$

- $\xrightarrow{0 \neq \lambda \neq \lambda_n}$ $\forall y \in X \; \exists!$ SOLUZIONE
- $\xrightarrow{\lambda = \lambda_n}$ NON HA SOLUZIONE $y \not\perp k(\lambda_n)$
  HA ∞ SOLUZIONI $y \perp k(\lambda_n)$
  (SOLUZIONI SONO SPAZIO AFFINE DI DIM. PARI A $k(\lambda_n)$).

DIM. TEOREMA SPETTRALE

(1) PRENDO λ_n, $k(\lambda_n)$ COME NEL TEO. SPETTRALE PER OP. COMPATTI. SO CHE $\sigma(A) \setminus \{0\}$ È NUMERABILE $\Rightarrow$ POSSO SCRIVERLO COME $\{\lambda_1 \dots \lambda_N\}$ OPPURE $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots\}_{n \in \mathbb{N}}$

(2) $\lambda_n \in \mathbb{R}$ PERCHÉ $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ IN QUANTO A AUTOAGGIUNTO.

$\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ PERCHÉ $\sigma(A) \setminus \{0\}$ È DISCRETO IN QUANTO A COMPATTO

(3) DAL TEO. SPETTRALE PER OP. COMPATTI SO CHE $(A - \lambda_n I)^N \big|_{k(\lambda_n)} \equiv 0$ PER QUALCHE N. VOGLIO FAR VEDERE CHE $N = 1$

SE FOSSE $N \geq 2$, $\|(A-\lambda_n I)^{N-1} x\|^2 = ((A-\lambda_n I)^{N-1}x, (A-\lambda_n I)^{N-1}x)$

$$\overset{A-\lambda_n I \text{ AUTOAGGIUNTO}}{=} (x, (A-\lambda_n I)^{2N-2} x) \qquad x \in k(\lambda_n)$$

$$\Rightarrow (A-\lambda_n I)^{N-1} x = 0 \quad \forall x \in k(\lambda_n) \qquad \overset{2N-2 \geq N}{=} (x, 0) = 0$$

RIPETO E AVRÒ $(A - \lambda_n I)x = 0 \quad \forall x \in k(\lambda_n)$

(4) $x \in k(\lambda_n) \overset{(3)}{\Rightarrow} Ax = \lambda_n x$ (PROPOSIZ.)
$y \in k(\lambda_m)$ $\quad Ay = \lambda_m y \Rightarrow x \perp y \Rightarrow k(\lambda_n) \perp k(\lambda_m)$

ANALOGAMENTE, $z \in \ker A \Rightarrow Az = 0 \cdot z \Rightarrow z \perp x \quad z \perp y$

(5) $E := \overline{\text{Span}\{K(\lambda_n)\} \oplus \ker A}$. PER AVERE $E = H$ BASTA AVERE $E^\perp = \{0\}$

ANZITUTTO, $A(E^\perp) \subset E^\perp$: SE $x \in E^\perp$, $(Ax, y) = (x, Ay) = \bar{\lambda}(x, y) = 0$

$Ay = \lambda y$ ($\lambda = \lambda_n$ OPPURE $\lambda = 0$) $\quad x \in E^\perp$

$Ax \perp y$ PER OGNI $y \in K(\lambda_n)$, $y \in \ker(A)$ $\Rightarrow$ PER LINEARITÀ $Ax \perp y \ \forall y \in E$

CONSIDERARE $A|_{E^\perp}$ COMPATTO, NON HA AUTOVALORI $\Rightarrow \sigma(A|_{E^\perp}) = \{0\}$

$\Downarrow$ AUTOAGGIUNTO

$A|_{E^\perp} \equiv 0$

$A|_{E^\perp} \equiv 0 \Rightarrow E^\perp \subset \ker A$

MA PER DEFINIZIONE $E^\perp \perp \ker A$

$\Rightarrow E^\perp = \{0\}$ CIOÈ $E = H$.

ESEMPI

(1) $A : \ell_2 \to \ell_2 \qquad a_n \to 0 \Rightarrow$ COMPATTO

$a_n \in \mathbb{R} \Rightarrow$ AUTOAGGIUNTO

$(x(1), x(2), \dots) \to (a_1 x(1), a_2 x(2) \dots)$

$A e_n = a_n e_n \Rightarrow e_n$ AUTOVETTORI, $\lambda = a_n$ AUTOVALORI $\Rightarrow \sigma(A) = \{0\} \cup \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$K(a_n) = \text{Span}\{e_n\}$ POTREBBE AVERE $\dim > 1$ SE $a_n = a_m$ PER $n \neq m$

$\lambda = 0$ PUÒ ESSERE AUTOVALORE SE $a_n = 0$ PER QUALCHE n.

LA BASE STANDARD È UN SISTEMA ORTONORMALE COMPLETO DI AUTOVETTORI.

(2) $A : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$

$f \to u \qquad$ SOLUZIONE DI $\begin{cases} (-pu')' + qu = f \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$

GIÀ VISTO CHE È COMPATTO, AUTOAGGIUNTO, INIETTIVO, $\int (Af) f \geq 0 \Rightarrow m \geq 0$

$\Downarrow$

0 NON È AUTOVALORE $\qquad \sigma(A) \subset [0, +\infty)$

$\Rightarrow \lambda_n > 0$, $\lambda_n \to 0$ $\quad$ POSSO SUPPORRE $\lambda_n \searrow 0$, GLI AUTOVETTORI RISOLVONO f_n: $Af_n = \lambda_n f_n$

$f = \frac{Af - g}{\lambda} = \frac{u - g}{\lambda}$ $\begin{cases} (-p f_n')' + q f_n = \frac{f_n}{\lambda_n} \quad (*) \\ f_n(a) = f_n(b) = 0 \end{cases}$

L'EQ. $Af - \lambda f = g$ $(**)$ $\Rightarrow \begin{cases} (-pu')' + qu = \frac{u-g}{\lambda} \\ u(a) = u(b) = \end{cases}$ $\quad \lambda = \lambda_n \quad \exists$ SOLUZIONI $\Leftrightarrow$

L'EQ. $Af - \lambda f = g$ (**) $\Rightarrow \begin{cases} (-pu')' + qu = \frac{u-g}{\lambda} \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$ $\lambda = \lambda_n$ $\exists$ SOLUZIONI $\Leftrightarrow$ $\int_a^b f_n g = 0 \quad \forall f_n \in V(\lambda_n)$

$p \equiv 1 \quad q \equiv 0 \quad [a,b] = [0,1] \Rightarrow \begin{cases} -u'' = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$ (*) DIVENTA $\begin{cases} -f_n'' = \frac{f_n}{\lambda_n} \\ f_n(0) = f_n(1) = 0 \end{cases}$

CI SONO SOLUZIONI NON BANALI $\lambda_n = \frac{1}{n^2\pi^2}$ DATE DA $f_n = \sin(\pi n x)$

$\Rightarrow$ L'EQ. (**) $\begin{cases} -u'' = \frac{u-g}{\lambda} \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$ $\lambda \neq \lambda_n \rightarrow$ SEMPRE RISOLVIBILE, $\lambda = \lambda_n \rightarrow$ RISOLVIBILE $\Leftrightarrow \int_0^1 g(x) \sin(\pi n x)\, dx = 0$

$\Rightarrow$ IL SISTEMA ORTONORMALE DI FOURIER $\{\sin(\pi n x)\}$ È DI AUTOVETTORI PER A E POSSIAMO SCRIVERE

$$A: f = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin(\pi n x) \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{\pi^2 n^2} \sin(\pi n x)$$