PROBLEMA: ESTENDERE FUNZIONALI LINEARI

SCENARIO: X SP. NORMATO $\quad E \subset X$ SOTT. LINEARE $\quad L \in E^*$, $L: E \to \mathbb{R}$

CERCO $\tilde{L}: X \to \mathbb{R}$ LINEARE CONTINUO

TALE CHE $\|\tilde{L}\|_{X^*} = \|L\|_{E^*}$ (IN GENERALE $\|\tilde{L}\| \geq \|L\|$ PER UN'ESTENSIONE $\tilde{L}$)

$\boxed{\text{OSSERVAZIONE}}$ SE $E \subset X$ DENSO E $L \in E^*$, L'UNICA ESTENSIONE CONTINUA DI L A $\tilde{L} \in X^*$ È DEFINITA COSÌ: DATO $x \in X$, $E \ni x_n \to x$, DEFINISCO $\tilde{L}(x) = \lim_{n \to \infty} L x_n$ (ESTENSIONE STANDARD PER DENSITÀ). SI DIMOSTRA CHE $\tilde{L}$ È LINEARE, CONTINUA, NON DIPENDE DALLA SCELTA DI x_n, $\|L\|_{E^*} = \|\tilde{L}\|_{X^*}$

SE $E \subset X$ NON È DENSO, IN QUESTO MODO ESTENDO L A $\tilde{L}: \bar{E} \to \mathbb{R}$

TEOREMA DI HAHN-BANACH

SIA X SP. NORMATO, $E \subset X$ SOTT. LINEARE

$P: X \to \mathbb{R}$ OMOGENEO E SUBADDITIVO E

$L: E \to \mathbb{R}$ LINEARE TALE CHE $Lx \leq P(x)$ $\forall x \in E$

ALLORA $\exists\, \tilde{L}: X \to \mathbb{R}$ LINEARE TALE CHE $\tilde{L}x = Lx$ $\forall x \in E$, INOLTRE $\tilde{L}x \leq P(x)$ $\forall x \in X$

$\boxed{\text{DEF}}$ SIA X UNO SP. NORMATO.

$P: X \to \mathbb{R}$ SI DICE OMOGENEO SE $P(\lambda x) = \lambda P(x)$ $\forall x \in X$ $\forall \lambda > 0$

P SI DICE SUBADDITIVO SE $P(x+y) \leq P(x) + P(y)$ $\forall x, y \in X$.

$\boxed{\text{OSS}}$ TUTTE LE (SEMI) NORME SONO OMOGENEE E SUBADDITIVE

$\boxed{\text{COROLLARIO}}$ SE $E \subset X$ SOTT. LINEARE DI UNO SP. NORMATO E $L \in E^*$, ALLORA $\exists\, \tilde{L} \in X^*$ TALE CHE $\|\tilde{L}\|_{X^*} \overset{*}{=} \|L\|_{E^*}$

DIM BASTA APPLICARE IL TEOREMA CON $P(x) = \|L\|_{E^*} \|x\|$. DAL TEOREMA OTTENIAMO $\tilde{L}x \leq \|L\|\,\|x\|$ $\Rightarrow |\tilde{L}x| \leq \|L\|\,\|x\|$ CIOÈ $\|\tilde{L}\| \leq \|L\|$

$-x$ AL POSTO DI x: $-\tilde{L}x \leq \|L\|\,\|x\|$

$\|\tilde{L}\| \geq \|L\|$ VERO $\forall$ ESTENSIONE

$\boxed{\text{DIM. DEL TEO. HAHN-BANACH}}$ UTILIZZIAMO IL LEMMA DI ZORN:

"SE $(P, \leq)$ È INSIEME PARZ. ORDINATO, $P \neq \emptyset$, È TALE CHE OGNI $Q \subset P$ TOT. ORDINATO HA UN MAGGIORANTE, ALLORA P HA UN EL. MASSIMALE"

$P = \{ (F,M) : \begin{array}{l} F \subset X \text{ SOTT. LINEARI CON } F \supset E \\ M : F \to \mathbb{R} \text{ LINEARI CON } M|_E = L,\ M \leq p \end{array} \}$ $\quad (F,M) \leq (F',M') \overset{DEF}{\iff} F \subset F',\ M'|_F = M$

SI VEDE FACILMENTE CHE $\leq$ È ORDINE PARZIALE SU P.

VERIFICO LA PROPRIETÀ DI ZORN: PRENDO $\{(F_\alpha, M_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ TOT. ORDINATO RISPETTO A $\leq$.

CERCO UN MAGGIORANTE. $F_0 = \underline{\bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha}$

$\forall x \in F_0$, $M_0 x = M_\alpha x$ SE $x \in F_\alpha$ (BEN DEFINITO PERCHÉ SE $x \in F_\alpha \subset F_\beta$ ALLORA $M_\alpha x = M_\beta x$)

(F_0, M_0) È MAGGIORANTE $\Rightarrow \exists (\tilde{E}, \tilde{L})$ EL. MASSIMALE DI P

VOGLIO FAR VEDERE CHE $\tilde{E} = X$. SUPPONGO PER ASSURDO $\exists x_0 \in X \setminus \tilde{E}$.

ALLORA ESTENDO $\tilde{L}$ A $\hat{L} : \operatorname{span}\{\tilde{E}, x_0\} \to \mathbb{R}$ SE POSSO FARLO PER QUALCHE $c \in \mathbb{R}$, HO UN ASSURDO!

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{span}\{\tilde{E}, x_0\} & \to & \mathbb{R} \\ x + t x_0 & \longrightarrow & \tilde{L} x + c t \\ x \in \tilde{E},\ t \in \mathbb{R} & & \end{array}$$

VOGLIO CHE VALGA $\underbrace{\hat{L}(x + t x_0)}_{= \tilde{L} x + c t} \leq p(x + t x_0)$. USO L'OMOGENEITÀ DI p:

$$\begin{cases} \tilde{L}\left(\frac{x}{t}\right) + c \overset{(*)}{\leq} p\left(\frac{x}{t} + x_0\right) & t > 0 \\ \tilde{L}\left(\frac{x}{t}\right) + c \overset{(**)}{\geq} -p\left(-\frac{x}{t} - x_0\right) & t < 0 \end{cases}$$

RISCRIVO $(*)$ CHIAMANDO $y = \frac{x}{t}$

$c \leq p(y + x_0) - \tilde{L} y$.

RISCRIVO $(**)$ CHIAMANDO $z = \frac{x}{t}$

$c \geq -p(-z - x_0) - \tilde{L} z$.

POSSO TROVARE c CHE MI DÀ L'ASSURDO $\iff -p(-z - x_0) - \tilde{L} z \leq p(y + x_0) - \tilde{L} y \quad \forall y, z \in \tilde{E}$

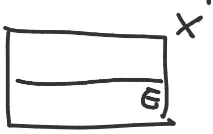
QUESTO È VERO PERCHÉ $-p(-z - x_0) - \tilde{L} z - (p(y + x_0) - \tilde{L} y)$

$$= \tilde{L}(y - z) - (p(y + x_0) + p(-z - x_0))$$

$$\overset{(\tilde{L} \leq p)}{\leq} p(\overbrace{y - z}^{(y + x_0) + (-z - x_0)}) - (p(y + x_0) + p(-z - x_0)) \leq 0 \text{ PERCHÉ } p \text{ SUBADDITIVO.}$$

OSSERVAZIONI ① IN GENERALE, $\tilde{L}$ NON È UNICA: $X = \mathbb{R}^2$, $\|x\| = |x_1| + |x_2|$

$E = \{x_2 = 0\}$ $\quad L : E \to \mathbb{R}$, $(x_1, 0) \to x_1$, $\|L\| = 1$, ESTENSIONE $\tilde{L} : X \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \to x_1 + c x_2$



PER QUALI VALORI DI c VALE $\|\tilde{L}\| = \|L\|$?

$\boxed{ E}$ $(x_1, x_2) \to x_1 + c x_2$

PER QUALI VALORI DI C VALE $\|\tilde{L}\| = \|L\|$? $\tilde{L} = \sup \frac{|x_1 + c x_2|}{|x_1| + |x_2|} = \begin{cases} |c| & |c| > 1 \\ 1 & |c| \leq 1 \end{cases}$

PER TUTTI I $c \in [-1, 1]$, $\|\tilde{L}\| = \|L\|$!

(2) SUGLI HILBERT, L'ESTENSIONE È UNICA ED ESPLICITA. SE $E \subset H$, $L \in E^*$

DEFINISCO $H = E \oplus E^{\perp} \xrightarrow{\tilde{L}} \mathbb{R}$ $\|\tilde{L}\| = \|L\|$. SE INVECE $\exists y_0 \in E^{\perp}: \tilde{L}y_0 \neq 0$,

$x = Px + Qx \longrightarrow LPx$

ALLORA $\left(\frac{\tilde{L}(x + t y_0)}{\|x + t y_0\|}\right)^2 = \frac{(Lx + t y_0)^2}{\|x\|^2 + t^2\|y_0\|^2}$ HA IL MAX IN $t = \frac{\|x\|^2}{\|y_0\|^2} \frac{\tilde{L}y_0}{Lx}$ (x FISSATO)

$$= \frac{(Lx)^2}{\|x\|^2} + \frac{\tilde{L}y_0^2}{\|y_0\|^2}$$

PASSO AL $\sup_x \Rightarrow \|\tilde{L}\| \geq \sqrt{\|L\|^2 + \frac{\tilde{L}y_0^2}{\|y_0\|^2}} > \|L\|$

CONSEGUENZE DI HAHN-BANACH SUGLI SPAZI DUALI

LEMMA (*) SIA X SPAZIO NORMATO, $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$. ALLORA $\exists L_0 \in X^*$ TALE CHE $\|L_0\|_{X^*} = 1$ E $L_0 x_0 = \|x_0\|$ (IN GENERALE, $\leq$). IN PARTICOLARE, $\|x_0\| = \max_{\|L\|=1} \|Lx_0\|$ (SUP VIENE RAGGIUNTO IN L_0)

(**) PIÙ IN GENERALE, DATO $E \subset X$ SOTT. LINEARE E DATO $x_0 \in X \setminus E$, $\exists L_0 \in X^*$, $\|L_0\| = 1$ TALE CHE $L|_E$, $Lx_0 = d(x_0, E)$ (IN GENERALE, $\leq$)

DIM APPLICO HAHN-BANACH A SPAN$\{x_0\}$ SPAN$\{x_0\} \xrightarrow{L} \mathbb{R}$

$t x_0 \longrightarrow t\|x_0\|$

$P(x) = \|x\| \Rightarrow \exists L_0 : X \to \mathbb{R}$ CON $L_0 x_0 = L x_0 = \|x_0\|$

E $L_0 x \leq \|x\|$ CIOÈ $\|L_0\|_{X^*} = 1$

CASO GENERALE: SPAN$\{E, x_0\} \xrightarrow{L} \mathbb{R}$, $P(x) = \|x\|$

$x + t x_0 \longrightarrow t\, d(x_0, E)$

$\dots \{\dots, x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $P(x) = \|x\|$

$x + t x_0 \longrightarrow t d(x_0, E)$

$(x \in E, t \in \mathbb{R})$

ESEMPI (1) $X = L^p$ $p < \infty$ X^* È ISOMETRICO A $L^{p'}$ OGNI $L \in X^*$ È DEL TIPO $L: f \to \int_X fg$ PER $g \in L^{p'}$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$

DATA f_0, L_0 DATA DAL LEMMA CORRISPONDE A $g = \frac{|f|^{p-2} f}{\|f\|_{L^p}^{p-1}}$ $\Rightarrow \int fg = \|f\|$ $\int |g|^p = 1$

(2) $X = H$ HILBERT. X^* È ISOMETRICO H, OGNI $L \in H^*$ È DEL TIPO $x \to (x, h)$

DATO x_0, L_0 CORRISPONDE A $h = \frac{x}{\|x\|}$ $\Rightarrow \|h\| = 1$ $(x, h) = \|x\|$

COROLLARIO X SP. NORMATO

SE $X \neq \{0\}$ ALLORA $X^* \neq \{0\}$. SE $\dim X = +\infty$ ALLORA $\dim X^* = +\infty$

DIM SE $X \neq \{0\}$, PRENDO $x_0 \in X \setminus \{0\}$, GRAZIE A (*) TROVO $L_0 \in X^*$: $L_0 x_0 = \|x_0\| \neq 0$

IN PARTICOLARE $L_0 \not\equiv 0$ $\Rightarrow X^* \neq \{0\}$

SE $\dim X = +\infty$, $\exists \{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ SOTTOSPAZI "STRETTAMENTE CRESCENTI", $E_n \subsetneq E_{n+1}$

PRENDO $x_n \in E_{n+1} \setminus E_n$ E COSTRUISCO (**) $L_n \in X^*$: $L_n|_{E_n} \equiv 0$ $L_n x_n = \|x_n\| \neq 0$

$\Rightarrow \{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ SUCC. DI FUNZIONALI TUTTI LINEARMENTE INDIPENDENTI $\Rightarrow \dim X^* = +\infty$

OSSERVAZIONE IL COROLLARIO È FALSO SU SPAZI VETTORIALI METRICI:

$X = L^p(0,1)$ CON $0 < p < 1$, $d(f, g) = \int_0^1 |f - g|^p$ (VALE LA TRIANGOLARE $\Rightarrow$ È UNA DISTANZA)

MA $X^* = \{0\}$: PRENDO $L \in X^* \setminus \{0\}$ $\Rightarrow \exists f : Lf \geq 1$, VOGLIO TROVARE UN ASSURDO, COSTRUENDO $f_n \to 0$ $Lf_n \geq 1$. CONSIDERO $t \to \int_0^t |f|^p$ È CONTINUA PER IL TEO. CONV. DOMINATA $\Rightarrow \exists t_0 !$ $\int_0^{t_0} |f|^p = \frac{1}{2} \int_0^1 |f|^p$, CIOÈ $g := f \chi_{[0, t_0]}$ $h := f \chi_{[t_0, 1]}$

$\Rightarrow d(g, \dots) = d(\dots) \dots d(f, \dots) \dots$

... t_0: $\int_0^{t_0} |f|^p = \frac{1}{2}\int_0^1 |f|^p$, CIOÈ $g := f\chi_{[0,t_0]}$ $h := f\chi_{[t_0,1]}$

$\Rightarrow d(g,0) = d(h,0) = \dfrac{d(f,0)}{2}$ $\quad d(2g,0) = d(2h,0) = \dfrac{d(f,0)}{2^{1-p}}$, INOLTRE

$1 \leq Lf = Lg + Lh = \frac{1}{2}L(2g) + \frac{1}{2}L(2h) \Rightarrow$ ALMENO UNO TRA $2g$ E $2h$ VERIFICA $L(2g) \geq 1$ OPPURE $L(2h) \geq 1$, LO CHIAMO f_1

$Lf_1 \geq 1$ $\quad d(f_1, 0) = \dfrac{d(f,0)}{2^{1-p}}$, RIPETO: TROVO f_2 TALE CHE $Lf_2 \geq 1$, $d(f_2,0) = \dfrac{d(f,0)}{2^{2(1-p)}}$

ITERANDO, HO $\{f_n\}$ TALE CHE $Lf_n \geq 1$, $\quad d(f_n, 0) = \dfrac{d(f,0)}{2^{n(1-p)}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ CIOÈ $f_n \to 0$

CONTRADDIZIONE CON LA CONTINUITÀ DI L.

$L \to Lx$ SE $L \in X^*$, $x \in X$ È FUNZIONALE LINEARE CONTINUO SU X^*

DEFINIZIONE IL <u>BIDUALE</u> DI UNO SP. NORMATO X È IL DUALE DI X^*

$$X^{**} = \{\Lambda : X^* \to \mathbb{R} \text{ LINEARI CONTINUI}\}$$
$$L \to \Lambda L$$

PROPOSIZIONE SE X È SP. NORMATO, $\exists\, J : X \to X^{**}$ ISOMETRIA NEL BIDUALE

$$x \to \Lambda_x : x \to Lx$$

DEF. SE J È SURIETTIVA, X SI DICE <u>RIFLESSIVO</u>

<u>DIM</u> J È LINEARE (IMMEDIATO). FACCIO VEDERE CHE È ISOMETRIA:

$$\|J(x)\|_{X^{**}} := \sup_{\|L\|=1} |\Lambda_x L| = \sup_{\|L\|=1} |Lx| \overset{\text{LEMMA}}{=} \|x\|$$

OSSERVAZIONE $\|x\| = \max_{\|L\|=1} |Lx|$ CI AIUTA A CAPIRE SE UNO SPAZIO È RIFLESSIVO.

SO CHE $\|L\| = \max_{\|\Lambda\|=1} |\Lambda L| = \sup_{\|x\|} |Lx|$. SE IL SUP <u>NON</u> È RAGGIUNTO DA $x \in X$, ALLORA IL MAX SARÀ RAGGIUNTO DA $\Lambda \notin J(X) \Rightarrow J$ <u>NON</u> SURIETTIVA CIOÈ X <u>NON</u> RIFLESSIVO.

ESEMPI ① L^p È RIFLESSIVO SE $p \neq 1, \infty$, ANCHE GLI HILBERT SONO RIFLESSIVI

② $L^1([0,1])$ NON È RIFLESSIVO: FACCIO VEDERE CHE $(L^\infty([0,1]))^*$ NON È ISOMETRICO A L^1, CIOÈ $L^\infty([0,1])^* \longrightarrow L^1([0,1])$ NON È SURIETTIVA

COSTRUISCO $L \in (L^\infty([0,1]))^* \setminus L^1([0,1])$ $\quad f \longrightarrow \int_0^1 fg$

CON IL TEO. DI HAHN-BANACH:

$E = C([0,1])$, $L \in E^*$ ESTENDO CON HAHN-BANACH A $(L^\infty)^*$

$L: f \to f(0)$

SE FOSSE $L: f \to \int_0^1 fg$ PER $g \in L^1([0,1])$

AVREI $f(0) = \int_0^1 fg \quad \forall f \in C([0,1])$ IMPOSSIBILE.

③ $C([0,1])$ NON È RIFLESSIVO: USO L'OSS. DI PRIMA

$C([0,1])^* \ni L: f \to \int_0^{\frac{1}{2}} f - \int_{\frac{1}{2}}^1 f \qquad \|L\| = 1$ MA SE $f \in C([0,1])$

ALLORA $|Lf| < \|f\|_\infty$ PERCHÈ AVREI $=$ SOLO SE $f = \begin{cases} 1 & [0,\frac{1}{2}] \\ -1 & (\frac{1}{2},1] \end{cases}$

NON CONTINUA

DUNQUE $\|L\|$ NON RAGGIUNTA DA NESSUNA $f \Rightarrow C([0,1])$ NON RIFLESSIVO.