DIM. TEOREMA DI IMMERSIONE DI SOBOLEV | $W^{1,p}((a,b)) \hookrightarrow C^{0,1-\frac{1}{p}}((a,b))$

$\Rightarrow W^{1,p}((a,b)) \hookrightarrow C^{0,\alpha}((a,b))$ SE $\alpha < 1-\frac{1}{p}$ e $a,b \in \mathbb{R}$

$W^{1,p}((a,b)) \hookrightarrow L^q((a,b))$

PRENDO $u \in W^{1,p}$, VOGLIO DIMOSTRARE CHE

(*) $\|u\|_\infty \le C\|u\|_{W^{1,p}}$, (**) $\sup_{x \neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{1-\frac{1}{p}}} \le C\|u\|_{W^{1,p}}$

PER QUALCHE COSTANTE $C>0$

$|u|^{p-1}u = H(u)$, $H \in C^1$ $\Rightarrow H'(u) = p|u|^{p-1}$. APPLICO IL TEO. FOND. CALCOLO A $H(u(x))$:

$$|H(u(x))| = \left|H(u(x_0)) + \int_{x_0}^{x} H'(u(t))u'(t)\,dt\right| \le |H(u(x_0))| + \int_{x_0}^{x} |H'(u)|\,|u'|$$

$\| \quad |u(x)|^p$

$$= |u(x_0)|^p + \int_{x_0}^{x} p\,|u|^{p-1}|u'| \qquad \left(q = \frac{p}{p-1}\right) \qquad ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

x_0 È ARBITRARIO, LO SCELGO IN MODO CHE $|u(x_0)|^p \le \frac{1}{b-a}\int_a^b |u|^p$ $\le \delta \int |u|^p + \int_a^b |u'|^p + (p-1)|u|^p \le C\left(\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p\right)$

SE $b-a = +\infty$, POSSO TROVARE $x_0 : |u(x_0)|^p \le \delta \int_a^b |u|^p \quad \forall \delta > 0$

$\Downarrow$ PASSO AL $\sup_x$

$\|u\|_\infty \le C\|u\|_{W^{1,p}}$

MOSTRO (**) E HO CONCLUSO:

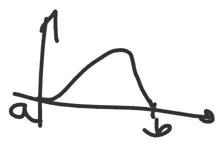
$$|u(x)-u(y)| = \left|\int_y^x u'\right| \le \int_y^x |u'| \underset{\text{HÖLDER}}{\le} \left(\int_y^x |u'|^p\right)^{\frac{1}{p}} |x-y|^{1-\frac{1}{p}} \le \|u'\|_{L^p}|x-y|^{1-\frac{1}{p}}$$

$$\Rightarrow \sup_{x \neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{1-\frac{1}{p}}} \le \|u'\|_{L^p} \le \|u\|_{W^{1,p}} \Rightarrow (**)$$

POICHÉ $u \in W^{1,p}((a,b))$ È CONTINUA SU $[a,b]$, HA SENSO DEFINIRE $u(x)$ $\forall x \in [a,b]$ IN PARTICOLARE $u(a), u(b)$.

DEF | LO SPAZIO DI SOBOLEV DELLE FUNZIONI NULLE AL BORDO È $(a,b \in \mathbb{R})$

$$W_0^{1,p}((a,b)) = \{u \in W^{1,p}((a,b)) : u(a) = u(b) = 0\}$$



OSS (1) $W_0^{1,p}((a,b)) \triangleleft W^{1,p}((a,b))$: LA LINEARITÀ È IMMEDIATA, INOLTRE È CHIUSO:

SE $u_n \to u$ IN $W^{1,p}$, ALLORA $|u(a)| = |u(a)-u_n(a)| \le \|u-u_n\|_\infty \le C\|u-u_n\|_{W^{1,p}} \to 0$

$u_n(a) = u_n(b) = 0$

... ALLORA $|u(a)| = |u(a) - u_n(a)| \le \|u - u_n\|_\infty \underset{\text{TEO. IMMERSIONE}}{\le} C \|u - u_n\|_{W^{1,p}} \to 0 \Rightarrow u(a) = 0$

$u_n(a) = u_n(b) = 0$

ALLO STESSO MODO, $u(b) = 0$.

② $W_0^{1,p}((a,b)) \subsetneq W^{1,p}((a,b))$: LE COSTANTI SONO IN $W^{1,p}$, NON IN $W_0^{1,p}$.

③ $W^{1,p}(\mathbb{R}) = W_0^{1,p}(\mathbb{R})$, CIOÈ SE $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ ALLORA $u(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$.

SE $u \in L^p$, PUÒ ACCADERE: $u(x) \not\xrightarrow[x \to \infty]{} 0$

SE $u \in L^p$ $\exists\, x_n \to \infty$ TALE CHE $u(x_n) \to 0$

SE ANCHE $u' \in L^p$, ALLORA $u(y_n) \to 0$ $\forall y_n \to \infty$, CIOÈ $u(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$

APPLICO IL TEO. FOND. CALCOLO A $|u|^{p-1} u$:

$$|u(y_n)|^{p-1} u(y_n) = \underbrace{|u(x_n)|^{p-1} u(x_n)}_{\downarrow\, 0} + \int_{x_n}^{y_n} p \underbrace{|u|^{p-1} u'}_{\le (p-1)|u'|^p + |u|^p} \longrightarrow 0$$

PER IL TEO. CONV. DOMINATA

$\le (p-1)|u'|^p + |u|^p$ MAGGIORANTE INTEGRABILE

TEOREMA (DISUGUAGLIANZA DI POINCARÉ)

SE $u \in W_0^{1,p}((a,b))$ ALLORA $\|u\|_{W^{1,p}} \le C \|u'\|_{L^p}$ PER QUALCHE COSTANTE $C > 0$ INDIPENDENTE DA u.

IN PARTICOLARE, POICHÉ $\|u\|_{W^{1,p}} \ge \|u'\|_{L^p}$ SEMPRE, $\|u'\|_{L^p}$ È UNA NORMA EQUIVALENTE SU $W_0^{1,p}((a,b))$

DIM | BASTA FAR VEDERE CHE $\|u\|_{L^p} \le C \|u'\|_{L^p}$ PER QUALCHE $C > 0$:

$$\|u\|_{L^p}^p = \int_a^b |u(x)|^p dx \underset{\substack{\text{TEO. FOND. CALC.} \\ u(a)=0}}{=} \int_a^b \left| \int_a^x u' \right|^p dx \le \int_a^b dx \left(\int_a^x |u'|^p \right) (x-a)^{p-1} \le \int_a^b \underbrace{\left(\int_a^b |u'|^p \right) (b-a)^{p-1}}_{} = (b-a)^p \|u'\|_{L^p}^p$$

$\Rightarrow \|u\|_{L^p} \le (b-a) \|u'\|_{L^p}$.

OSS | ① LA DIS. DI POINCARÉ NON VALE SU $W^{1,p}((a,b))$ PERCHÉ SE $u \equiv c \in W^{1,p}((a,b))$ ALLORA $\|u\|_{L^p} \ne 0$ MA $\|u'\|_{L^p} = 0$.

② $p = 2$ UN PRODOTTO SCALARE EQUIVALENTE È $(u, v) = \int_a^b u'v'$

PIÙ IN GENERALE, $\int_a^b (p u'v' + q u v)$ $\quad p \ge \delta > 0 \quad p \in L^\infty((a,b))$

$\quad q \ge 0 \quad q \in L^1((a,b))$

LEMMA | ...

$g \geq 0 \qquad g \in L^1((a,b))$

LEMMA $C_0^\infty((a,b))$ È DENSO IN $W_0^{1,p}((a,b))$. SE $p < \infty$

OSS

① LA DENSITÀ DI C_0^∞ È FALSA IN $W^{1,p}$: POSSO APPROSSIMARE $u \in W^{1,p}$ CON $\varphi_n \in C_0^\infty$ SOLO SE $u(a) = u(b) = 0$ (IN ALTRE PAROLE, $W_0^{1,p}$ È LA CHIUSURA DI C_0^∞ RISPETTO A $\|u\|_{W^{1,p}}$). INFATTI, $\underset{|u(a)|}{\underset{\|}{|\varphi_n(a) - u(a)|}} \leq \|\varphi_n - u\|_\infty \underset{\text{TEO. IMMERSIONE}}{\leq} C \|\varphi_n - u\|_{W^{1,p}} \to 0$

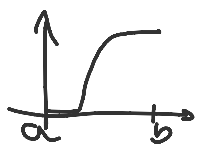
② C_0^∞ NON È DENSO IN $W_0^{1,\infty}$ PERCHÈ SE $u \in W_0^{1,\infty}$, $u' \in L^\infty$ NON PUÒ ESSERE APPROSSIMATA DA C_0^∞ IN NORMA $\|\cdot\|_{L^\infty}$, A MENO CHE NON SIA $u \in C^1$.

DIM FISSO $u \in W_0^{1,p}$, CERCO $\varphi_n \in C_0^\infty$ $\boxed{\varphi_n \to u}$ IN $W^{1,p}$.

POICHÉ $u' \in L^p$, $\exists\, \psi_n \in C_0^\infty : \psi_n \to u'$ IN L^p. PONGO $\varphi_n = \int_a^x \psi_n - \left(\int_a^b \psi_n\right) \eta_0(x)$

$\eta_0(x) \in C^\infty$ $\quad \eta_0 \equiv 1$ VICINO b

$\eta_0 \equiv 0$ VICINO a



DALLA DISUG. POINCARÉ, BASTA FAR VEDERE $\varphi_n' \to u'$ IN L^p

$\varphi_n'(x) = \psi_n(x) - \left(\int_a^b \psi_n\right) \eta_0'(x)$

$\int_a^b u' = u(b) - u(a) = 0$

$|\varphi_n'(x) - u'(x)| \underset{L^p}{=} \left|\psi_n(x) - u'(x) - \left(\int_a^b (\psi_n - u')\right) \eta_0'(x)\right|$

$\leq \|\psi_n - u'\|_{L^p} + \|\eta_0\|_{C^1} \int_a^b |\psi_n - u'|$

$\leq \|\psi_n - u'\|_{L^p} + C \|\psi_n - u\|_{L^p} \longrightarrow 0.$

COROLLARIO ① SE $u \in W^{1,p}((a,b))$, ALLORA $\int_a^b u v' = -\int_a^b u' v \quad \forall v \in W_0^{1,1}((a,b))$

② SE $u, v \in W^{1,p}((a,b))$ ALLORA $uv \in W^{1,p}((a,b))$ E $(uv)' = uv' + u'v$

② SE $U,V \in W^{1,p}((a,b))$ ALLORA $UV \in W^{1,p}((a,b))$ E $(UV)' = UV' + U'V$

(ALLO STESSO MODO, SE $U \in W^{1,p}$, $U \geq \delta > 0$, ALLORA $\frac{1}{U} \in W^{1,p}$, $\left(\frac{1}{U}\right)' = -\frac{U'}{U^2}$)

DIM

① FISSO U E APPROSSIMO $V \in W^{1,1}_0$ CON $\varphi_n \in C^\infty_0((a,b))$:

$\int_a^b U\varphi_n' = -\int_a^b U'\varphi_n$. BASTA FAR VEDERE $\int_a^b U\varphi_n' \longrightarrow \int_a^b UV'$, $\int_a^b U'\varphi_n \to \int_a^b U'V$

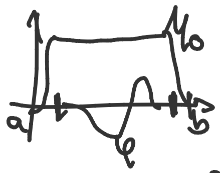
$$\left|\int_a^b U(\varphi_n'-V')\right| \le \int |U||\varphi_n'-V'| \le \|U\|_{L^\infty}\|\varphi_n'-V'\|_{L^1} \le C\|U\|_{W^{1,p}}\|\varphi_n - V\|_{W^{1,1}} \longrightarrow 0$$

HÖLDER   IMMERSIONE

$$\left|\int_a^b U'(\varphi_n - V)\right| \le \int |U'||\varphi_n - V| \le \|U'\|_{L^p}\|\varphi_n - V\|_{L^{p'}} \le C\|U\|_{W^{1,p}}\|\varphi_n - V\|_{W^{1,1}} \longrightarrow 0$$

② FISSO $\varphi \in C^1_0((a,b))$, VOGLIO $\int UV\varphi' \overset{(*)}{=} -\int \varphi(U'V + UV')$.

PRENDO $\eta_0 \in C^\infty_0((a,b))$ CHE VALE 1 SUL SUPPORTO DI φ



$\eta_0\varphi = \varphi$ $\eta_0 U \in W^{1,p}_0 \Rightarrow \exists\, \psi_n \in C^\infty_0 : \psi_n \longrightarrow \eta_0 U$ IN $W^{1,p}$.

$$\int|\psi_n'\varphi - U'\varphi|^p = \int|\psi_n'\varphi - U'\eta_0\varphi|^p \le \|\varphi\|_\infty \int|\psi' - U'\eta_0|^p \longrightarrow 0$$

ALLO STESSO MODO, $\psi_n\varphi' \longrightarrow U\varphi'$ IN L^∞

$\psi_n\varphi \longrightarrow U\varphi$

SO CHE $\int V\psi_n\varphi' = \int V'\psi_n\varphi + V\psi_n'\varphi$ (USO $\psi_n\varphi$ COME FUNZIONE TEST)

$\downarrow$ $\int VU\varphi'$ $\downarrow$ $\int V'U\varphi + VU'\varphi$ $\Rightarrow$ DIMOSTRATO (*)

UV HA COME DERIVATA DEBOLE $U'V + V'U \in L^p$, CIOÈ $U \in W^{1,p}$.

DEL ∞

DEL L^p

PROBLEMI AI VALORI AL BORDO

$U(0) = c_1 = 0$
$U(1) = c_2 = 0$
$U \in C^1\,[0,1]$

$\boxed{\text{DEF}}$ UNA **SOLUZIONE DEBOLE** DELL'EQ. DIFFERENZIALE

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = f & \text{SU } (a,b) \\ u(a) = 0 \\ u(b) = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} p \geq \delta > 0 \\ q \geq 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} p \in L^\infty((a,b)) \\ q, f \in L^1((a,b)) \end{matrix}$$

È UNA $u \in W_0^{1,2}((a,b))$ TALE CHE pu' HA UNA DERIVATA DEBOLE CHE VERIFICA $-(pu')' = f - qu$, CIOÈ:

$$\int_a^b (pu'\varphi' + qu\varphi) = \int_a^b f\varphi \quad \forall \varphi \in C_0^1((a,b))$$

$\boxed{\text{OSS}}$ 1) PER LA DENSITÀ DI $C_0^\infty((a,b))$ IN $W_0^{1,2}((a,b))$, AVRÒ $\int_a^b (pu'v' + quv) = \int_a^b fv \quad \forall v \in W_0^{1,2}((a,b))$. INFATTI, SE $\varphi_n \in C_0^\infty((a,b))$, $\varphi_n \to v$ IN $W^{1,2}$, ALLORA

$$\int_a^b (pu'\varphi_n' + qu\varphi_n) = \int_a^b f\varphi_n \to \int_a^b fv$$
$$\downarrow$$
$$\int_a^b (pu'v' + quv)$$

2) SE $u \in C^2([a,b])$ CHE RISOLVE PUNTUALMENTE $(-pu')' + qu = f$, $u(a) = u(b) = 0$ CON $\underline{f, q \in C([a,b])}$, $\underline{p \in C^1([a,b])}$ "SOL. CLASSICA", ALLORA È ANCHE SOL. DEBOLE. (BASTA INTEGRARE PER PARTI)

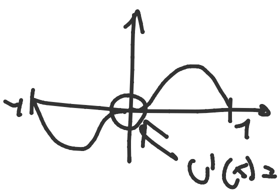
3) SE f, p, q <u>NON</u> SONO REGOLARI, POSSONO ESSERCI SOL. DEBOLI NON DI CLASSE C^2, AD ESEMPIO

$f(x) = \text{SEGNO}(x)$, $p \equiv 1$, $q \equiv 0$.

$$\begin{cases} -u''(x) = \text{SEGNO}(x) & \text{SU } (-1,1) \\ u(1) = u(-1) = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} u'\varphi' = \int_{-1}^{1} \varphi(x)\,\text{SEGNO}(x)\,dx = \int_0^1 \varphi - \int_{-1}^{0} \varphi$$

UNA (LA) SOLUZIONE È $u(x) = \dfrac{x(1-|x|)}{2}$



$u'(x) = |x|$ $\quad u \notin C^2$.

$\boxed{\text{PROPOSIZIONE}}$ LE SOL. DEBOLI DEL PROBLEMA AI VALORI AL BORDO $\left(\begin{matrix} p \in L^\infty \\ q, f \in L^1 \end{matrix}\right)$

$$\begin{cases} (-pu')' + qu = f & \text{SU } (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$ VERIFICANO $u \in W_0^{1,\infty}((a,b))$

$q, f \in L^1$)

$\begin{cases} (-pu')' + qu = f & \text{SU } (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$ VERIFICANO $u \in W_0^{1,p}((a,b))$

SE $p \in W^{1,p}$, $f, q \in L^p$, ALLORA $u' \in W^{1,p}$ (NOTAZIONE: $u \in W^{2,p}$), IN PARTICOLARE $u' \in C^{0,1-\frac{1}{p}}$

QUINDI $u \in C^1$.

SE $p \in C^{k+1}([a,b])$, $f, q \in C^k([a,b])$ ALLORA $u \in C^{k+2}([a,b])$ (SOL. CLASSICHE)