GIO 3/6 ORE 18:30 PRESENTAZIONE CORSI

---

# PROPRIETÀ DEGLI AUTOAGGIUNTI

(5) $m = \inf_{\|x\|=1} (Ax,x) \qquad M = \sup_{\|x\|=1} (Ax,x) \Rightarrow m, M \in \sigma(A)$

DIM FACCIAMO VEDERE $M \in \sigma(A)$. APPLICO LA DEF. SUP!
PRENDO $x_n$ TALE CHE $\|x_n\|=1$ $\quad (Ax_n, x_n) \nearrow M$ $\qquad$ SO CHE $(Mz - Az, z) \geq 0 \ \forall z$.

$|(x,y)|^2 \leq (x,x)(y,y)$ $\quad M-A$ $\qquad$ SCELGO $z = y - x_n \dfrac{(My - Ay, x_n)}{(Mx_n - Ax_n, x_n)}$

$$0 \leq (Mz - Az, z) = (My - Ay, y) - \frac{|(Mx_n - Ax_n, y)|^2}{(Mx_n - Ax_n, x_n)}$$

$$\Rightarrow |(Mx_n - Ax_n, y)|^2 \leq (My - Ay, y)(Mx_n - Ax_n, x_n)$$

$$\|Mx_n - Ax_n\|^2 = \sup_{\|y\|\leq 1} |(Mx_n - Ax_n, y)|^2 \leq \sup_{\|y\|\leq 1} (My - Ay, y)(Mx_n - Ax_n, x_n)$$

$\|x_n\|^2=1$

CAUCHY SCHWARTZ $\rightarrow$ $\leq \underbrace{\sup \|(MI - A)y\| \, \|y\|}_{\|MI - A\|} \ \underbrace{(M - (Ax_n, x_n))}_{\downarrow 0}$

$\|x_n\|=1$

$\|(MI - A)x_n\| \longrightarrow 0$. SE $A - MI$ FOSSE INVERTIBILE, ALLORA

$$x_n = -(A - MI)^{-1} \underbrace{((MI - A)x_n)}_{\to 0} \longrightarrow 0 \quad \text{ASSURDO.}$$

DUNQUE $M \in \sigma(A)$, ANALOGAMENTE $m \in \sigma(A)$.

(6) $\|A\| = \rho(A)$

DIM SAPPIAMO CHE $\rho(A) = \max\{|m|, |M|\} =: \mu$

$\|A\| \geq \rho(A) \Rightarrow$ BASTA MOSTRARE $\|A\| \leq \mu$

$$4\,\mathrm{Re}(x,y)_A = (x+y, x+y)_A - (x-y, x-y)_A$$

ESSENDO A AUTOAGGIUNTO,

$$4\,\mathrm{Re}\,(Ax,y) = (A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y) \quad \forall x,y \in H$$
$$\leq M\|x+y\|^2 - m\|x-y\|^2$$
$$\leq \mu\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right)$$
$$= 2\mu\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

SCELGO $y = Ax \dfrac{\|x\|}{\|Ax\|} \Rightarrow 2\cancel{4}\|x\|\,\|Ax\| \leq \cancel{2}\mu\left(\|x\|^{\cancel{2}} + \|x\|^{\cancel{2}}\right)$

$$\|Ax\| \leq \mu\|x\|$$

PASSO AL $\sup\limits_{\|x\|=1} \Rightarrow \|A\| \leq \mu = \rho(A)$.

---

## TEOREMA SPETTRALE PER OP. AUTOAGGIUNTI COMPATTI

SIA $A \in K(H)$ AUTOAGGIUNTO SU UN HILBERT $H$.
ALLORA $\exists \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ SUCCESSIONE OPPURE $\{\lambda_1 \dots \lambda_N\}$ VALORI E, PER OGNI $\lambda_n$, SOTTOSPAZI FINITO-DIMENSIONALI $K(\lambda_n)$, TALI CHE:

1. $\sigma(A) = \{\lambda_n\} \cup \{0\}$
2. $\lambda_n \in \mathbb{R}$ E $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (SE INFINITI)
3. $\lambda_n$ SONO AUTOVALORI E $A|_{K(\lambda_n)} = \lambda_n I$
4. $K(\lambda_n) \perp K(\lambda_m) \perp \ker(A) \quad \forall n \neq m$
5. $H = \overline{\mathrm{SPAN}\,(K(\lambda_n))_n} \oplus \ker(A)$

(5) $H = \mathrm{SPAN}(K(\lambda_n))_n \oplus \ker(A)$

**COROLLARIO** CONSIDERO SU CIASCUN $K(\lambda_n)$ E SU $\ker(A)$ UN SISTEMA O.N. COMPLETO

$H \xrightarrow{A} H$

$e_\alpha \in K(\lambda_n)$ OPPURE $\ker(A)$

$Ae_\alpha = \lambda_\alpha e_\alpha$ OPPURE $Ae_\alpha = 0$

$\sum (x, e_\alpha) e_\alpha \longrightarrow \sum \lambda_\alpha (x, e_\alpha) e_\alpha$

"DIAGONALIZZATO" L'OPERATORE A

$H$ SEPARABILE $\Rightarrow \lambda_n \to 0$

ESEMPIO: $l_2 \longrightarrow l_2$ $\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$

$(x(1), x(2), \ldots) \longrightarrow (a_1 x(1), a_2 x(2), \ldots)$

$\sum x(k) e_k \longrightarrow \sum a_k x(k) e_k$

GIÀ IN FORMA DIAGONALE RISPETTO A $\{e_k\}$ BASE STANDARD, $\lambda_1 = a_1$

$H$ NON SEPARABILE $\Rightarrow \lambda_\alpha \equiv 0$ TRANNE AL PIÙ NUMERABILI (PERCHÉ $K(\lambda_n)$ HA DIM. FINITA)

(2) $Ax - \lambda x = y$ QUANTE SOLUZIONI HA? $\lambda \neq \lambda_n \Rightarrow \exists!$ SOL. $\forall y \in H$

$\lambda = \lambda_n$ $y \perp K(\lambda_n)$ ALLORA $\exists \infty$ SOL. (SPAZIO DI DIM. PARI ALMENO)

$y \not\perp K(\lambda_n)$ ALLORA $\nexists$ SOL.

---

## DIM. TEOREMA

(1) SCELGO $\lambda_n$ COME $\sigma(A) \setminus \{0\}$: DAL TEO. SPETTRALE PER OP. COMPATTI SO CHE $\sigma(A) \setminus \{0\}$ È FINITO O NUMERABILE.

(2) $\lambda_n \in \mathbb{R}$ PERCHÉ $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ PER OGNI OP. AUTOAGGIUNTO

$\lambda_n \to 0$ PERCHÉ $\sigma(A)$ SI PUÒ ACCUMULARE SOLO IN 0

(3) DAL TEO. SPETTRALE PER OP. COMPATTI SO CHE $(A - \lambda_n I)^N \equiv 0$ SU $K(\lambda_n)$

FACCIAMO VEDERE CHE, SE $N \geq 2$, ALLORA $(A - \lambda_n I)^{N-1} \equiv 0$ SU $K(\lambda_n)$

(VIA VIA OTTENIAMO $A - \lambda I \equiv 0$ CIOÈ $N = 1$)

$\underset{x \in K(\lambda_n)}{\| (A - \lambda_n I)^{N-1} x \|^2} = ((A - \lambda_n I)^{N-1} x, (A - \lambda_n I)^{N-1} x) = (x, (A - \lambda_n I)^{2N-2} x)$

$$\underbrace{\|(A-\lambda_n I)x\|}_{x\in k(\lambda_n)} = \left((A-\lambda_n I)x, (A-\lambda_n I)x\right) = \left(x, (A-\lambda_n I)^{2N-2} x\right)$$

$(A-\lambda_n I)^{N-2}$ AUTOAGGIUNTO $\Rightarrow$

$$= \left(x, (A-\lambda_n I)^{N-2} \underbrace{(A-\lambda_n I)^N x}_{0}\right)$$

$$\Rightarrow (A-\lambda_n I)^{N-1}\Big|_{k(\lambda_n)} \equiv 0, \ \dots\ (A-\lambda_n I)\Big|_{k(\lambda_n)} \equiv 0 \qquad = 0 \quad \forall x\in k(\lambda_n)$$

CIOÈ AUTOVALORE.

④ $k(\lambda_n)$, $k(\lambda_m)$ SONO AUTOSPAZI $\quad x\in k(\lambda_n) \Rightarrow Ax = \lambda_n x$, $\quad y \in k(\lambda_m) \quad Ay = \lambda_m y$ $\xRightarrow{\text{PROPRIETÀ AUTOAGGIUNTO}}$ $x \perp y$ $\Rightarrow$ $k(\lambda_n)\perp k(\lambda_m)$

ALLO STESSO MODO $k(\lambda_n) \perp \ker(A)$ $\quad (y \in \ker(A) \Rightarrow Ay = 0y \dots)$

⑤ DEFINISCO $E = \overline{\mathrm{SPAN}\,(k(\lambda_n))} \oplus \ker(A)$, VOGLIO MOSTRARE $E^\perp = \{0\}$ $\quad (\Rightarrow E = H)$

ANZITUTTO, $A(E^\perp) \subset E^\perp$! SE $x\in E^\perp$ ALLORA $x\perp y$ $\quad \forall y: Ay = \lambda y$ PER QUALCHE $\lambda$

ALLORA $(Ax, y) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{AUTOAGGIUNTO}}}{=} (x, Ay) = \bar\lambda (x,y) = 0 \Rightarrow Ax \perp y$, PER LINEARITÀ E CHIUSURA

AVRÒ $Ax \perp y \quad \forall y \in E \Rightarrow Ax \in E^\perp$ CIOÈ $A(E^\perp) \subset E^\perp$

$A|_{E^\perp}$ È AUTOAGGIUNTO COMPATTO, NON HA AUTOVALORI $\underset{\substack{\uparrow\\ \text{COMPATTO}}}{\Rightarrow} \sigma(A) = \{0\} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{AUTOAGGIUNTO}}}{\Rightarrow} A|_{E^\perp} \equiv 0$

CIOÈ $\begin{matrix} E^\perp \subset \ker(A) \\ E^\perp \perp \ker(A) \end{matrix} \Rightarrow E^\perp = \{0\}$.

---

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ $\quad A: L^2((a,b)) \to L^2((a,b))$, $\quad f \to u$ RISOLVENTE DI $\begin{cases} (-pu')' + qu = f \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$

A È COMPATTO E AUTOAGGIUNTO, INOLTRE $(Af, f)_{L^2} > 0 \quad \forall f \neq 0 \Rightarrow \underline{\sigma(A) \subset [0, +\infty)}$

$A$ È INIETTIVO $\Rightarrow$ 0 NON È AUTOVALORE

$\exists \{\lambda_n\}$ $\lambda_n \searrow 0$, $f_n$ TALI CHE $\underset{\substack{\|\\ u_n}}{A f_n} = \lambda_n f_n$ CIOÈ $\begin{cases} (-p f_n')' + q f_n = \dfrac{f_n}{\lambda_n} \\ f_n(a) = f_n(b) = 0 \end{cases}$ (*)

$(A - \lambda I) f = g \overset{u = Af}{\iff} \Big\{ (-pu')' + qu = \dfrac{u-g}{\lambda}$ $\qquad \lambda \neq \lambda_n \Rightarrow \exists !$ SOL $\ \forall g$

$$(A-\lambda I)f=g \overset{u=Ag}{\iff} \begin{cases}(-pu')'+qu=\dfrac{u-g}{\lambda} \\ u(a)=u(b)=0\end{cases} \quad (\star\star)$$

$\lambda\neq\lambda_n \Rightarrow \exists!$ sol. $\forall g$

$\lambda=\lambda_n \Rightarrow \exists$ sol. se $\int f_n g=0$

ALTRIMENTI $\nexists$ SOL. $\forall f_n \in \ker(\lambda_n)$

$P\equiv 1 \qquad q\equiv 0$

$$\begin{cases}-u''=f\\ u(a)=u(b)=0\end{cases}$$

$f_n$ RISOLVONO $f''+\dfrac{f}{\lambda}=0$ SOL. NON BANALI

$$\begin{cases}-f_n''=\dfrac{f_n}{\lambda_n}\\ f_n(a)=f_n(b)=0\end{cases}$$

$$\lambda_n=\left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2\frac{1}{n^2}$$

$$f_n(x)=\sin\left(\frac{n\pi}{b-a}(x-a)\right)$$

$$\Downarrow$$

$$-f_n''(x)=\frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2}f_n=\frac{f_n}{\lambda_n}$$

$$\begin{cases}-u''=\dfrac{u-g}{\lambda}\\ u(a)=u(b)=0\end{cases}$$

$\xrightarrow{\lambda\neq\frac{1}{n^2}\left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2}$ $\exists!$ sol. $\forall g$

$\xrightarrow{\lambda=\lambda_n}$ $\exists$ sol. $(\infty) \iff \int g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{b-a}(x-a)\right)=0$

DIAGONALIZZO L'OPERATORE COME:

$$L^2 \xrightarrow{A} L^2$$

$$\sum c_n \sin\left(\frac{n\pi}{b-a}(x-a)\right) \longrightarrow \sum\left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2\frac{c_n}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{b-a}(x-a)\right)$$

LA "BASE DIAGONALIZZANTE" È LA BASE DI FOURIER TRIGONOMETRICA.