Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE210

A.A. 2015-2016 - Docente: Prof. A. Verra

Tutori: Francesco Di Tullio e Manuela Donati

Tutorato 4 - 19 Ottobre 2015

1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, con base $E =< e_1, e_2, e_3 >$, sono assegnate le forme quasratiche $q_1 e q_2$ rispettivamente con matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

   - Determinare l'espressione di q rispetto ad una base diagonalizzante.
   - Calcolare la segnatura di q.
   - Scrivere la matrice canonica (di Sylvester) di b.

2. Dimostrare che in uno spazio vettoriale Euclideo $(V, < . >)$ sussistono le seguenti identitá per ogni $v, w \in V$

   - $||v + w||^2 + ||v - w||^2 = 2||v||^2 + 2||w||^2$
   - $||v + w||^2 - ||v - w||^2 = 4 < v, w >$

3. Per ciascuna delle seguenti forme quadratiche q, stabilire usando il criterio di Sylvester se é definite positive, negative o indefinite.

   - $q(v) = {x_1}^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5{x_2}^2 + 2x_2x_4 - 2{x_3}^2 - 2x_3x_4$
   - $q(v) = 4{x_1}^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2$
   - $q(v) = {x_1}^2 - 4x_1x_2 + 7{x_2}^2 + 10x_2x_4 + {x_3}^2 + 8{x_4}^2$
   - $q(v) = {x_1}^2 - 4x_1x_2 + 6{x_2}^2 + 6{x_2}^2 - 2x_2x_3 + {x_3}^2 + {x_4}^2$

4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, con base $E =< e_1, e_2, e_3 >$, é assegnata la forma quadratica b con matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

   - Determinare la matrice associata a b tramite la base $< (1, 0, 0); (-1, 0, 1); (1, 1, 0) >$.
   - Verificare che il rango di tali matrici é uguale.