Tutorato di GE210

Tutori: Sabrina Capaldi & Andrea Lelli

Universitá degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato 4 - 28 Ottobre 2014

1. Sia T un operatore unitario. Dimostrare che:
   - Se T ha autovalori $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, allora gli autospazi V_{λ_1} e V_{λ_2} sono ortogonali tra loro.
   - Se $\vec{v}$ è un autovettore di T allora $\mathrm{T}(\vec{v}^{\perp}) \subseteq \vec{v}^{\perp}$.

2. In $\mathbb{R}^2$ è assegnato un prodotto scalare $\langle , \rangle$ definito rispetto ad una base $\mathbb{E}$ dalla matrice:

   $$\mathrm{C}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, sia $T_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'operatore definito (in base $\mathbb{E}$) dalla matrice:

   $$A_\alpha=\begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$, T_α è unitario.

3. Sia a: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare così definita rispetto alla base canonica $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$:

   $$\mathrm{a}(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2, \quad \mathrm{a}(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2$$

   $$\mathrm{a}(\vec{e}_3) = 4\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4, \quad \mathrm{a}(\vec{e}_4) = 2\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4$$

   - Verificare che a è un operatore simmetrico rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$ ($Nota$: dato uno spazio vettoriale V, un operatore T$\in$EndV si dice *simmetrico* se $\langle T(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, T(\vec{y}) \rangle$ $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$).
   - Determinare rango e segnatura della forma bilineare simmetrica b: $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ così definita:

     $$\mathrm{b}(\vec{x}, \vec{y}) = \langle a(\vec{x}), \vec{y} \rangle$$

     dove $\langle , \rangle$ indica il prodotto scalare standard.
   - Scrivere l'espressione canonica (o di Sylvester) di b, determinando una base rispetto alla quale b si scrive in forma canonica.

4. Si determinino, scrivendone la matrice associata rispetto alla base canonica $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ tutte le forme bilineari simmetriche:

$$\mathrm{F}\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

soddisfacenti le seguenti condizioni:

- $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ sono vettori isotropi;
- Lo spazio ortogonale di $\vec{v} = (1, 1, 1)$ rispetto ad F è il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

Al variare di F si determini:

- una base diagonalizzante per F e se ne deducano segnatura e rango.
- Due vettori linearmente indipendenti $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ che generano un sottospazio sul quale F è definita positiva.
- Una base diagonalizzante contenente il vettore $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{v}$.

5. Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ definito, rispetto ad una base $\mathbb{E}$ di $\mathbb{R}^2$, dalla matrice:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Verificare se esiste un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ rispetto a cui:

- T è autoaggiunto.
- T è unitario.

6. Siano le applicazioni lineari F: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cosí definite:

1) $\mathrm{F}((1, 0)) = (\frac{3}{4}, -\frac{1}{4})$, $\mathrm{F}((0, 1)) = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$

2) $\mathrm{F}((1, 0)) = (-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$, $\mathrm{F}((0, 1)) = (-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$

3) $\mathrm{F}((1, 0)) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $\mathrm{F}((0, 1)) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

- Determinare quali di esse sono operatori unitari.
- Riconoscere le rotazioni e determinare i relativi angoli di rotazione.
- Riconoscere le simmetrie e determinare i relativi assi di simmetria.