Tutorato di GE210

Tutori: Sabrina Capaldi & Andrea Lelli

Universitá degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato 3 - 22 Ottobre 2014

1. Per ciascuna delle forme quadratiche q: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ seguenti, usando il criterio di Sylvester, dire se è definita positiva, definita negativa o indefinita:

   - $q(v) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 2x_2x_4 - 2x_3^2 - 2x_3x_4$
   - $q(v) = 4x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$
   - $q(v) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 + x_4^2$
   - $q(v) = x_1^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x3 + 2x_2^2 + 2x_2x_4 + 9x_3^2 + 7x_4^2$
   - $q(v) = -4x_1^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_1x_4 - 3x_2^2 + 4x_2x_3 - 2x_2x_4 - 2x_3^2 - 2x_3x_4 - x_4^2$
   - $q(v) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 7x_2^2 + 10x_2x_4 + x_3^2 + 8x_4^2$

   Le forme quadratiche definite positive inducono un prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle$ su $\mathbb{R}^4$. Per queste ultime determinare una base ortonormale usando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.

2. $\forall\ h \in \mathbb{R}$, si determini la segnatura della forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^3$ la cui matrice associata rispetto alla base canonica è:

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & h & h \\ 2 & h & 0 \end{pmatrix}$$

3. Usare il completamento dei quadrati per diagonalizzare le seguenti forme quadratiche su $\mathbb{R}^3$:

   - $q(x, y, z) = x^2 + 2xy + \frac{1}{4}z^2 + 2zy$
   - $q(x, y, z) = x^2 + 4xy + 5y^2 - 3z^2$

4. Sia V$= \mathbb{R}^4$ con la base standard $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Sia q: $V \to \mathbb{R}$ la forma quadratica definita da:

   $$q(v) = 4x_1x_3 + 2x_2x_4$$

dove $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

- Determinare la forma bilineare associata a q.
- Determinare una base opportuna rispetto alla quale q abbia espressione canonica.
- Scrivere tale espressione e dedurre la segnatura ed il tipo di q (cioè se è def. positiva, def. negativa, etc.).

5. Sia V= $\mathbb{R}^3$ e sia, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la forma quadratica q: $V \to \mathbb{R}$ definita da:

$$\mathrm{q}(v) = (k+1)x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 2kx_2x_3 + 2x_3^2$$

dove $v = (x_1, x_2, x_3)$.

- Determinare la forma bilineare $f : V \times V \to \mathbb{R}$ associata a q.
- Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ le rette vettoriali W_1, W_2 di equazioni:

$$W_1 : \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad ; \quad W_2 : \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

  sono ortogonali rispetto ad f.
- Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ la forma bilineare f è un prodotto scalare.
- Determinare la segnatura di q al variare di $k \in \mathbb{R}$.