Tutorato di GE210

Tutori: Sabrina Capaldi & Andrea Lelli

Universitá degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato 2 - 15 Ottobre 2014

1. Data la matrice A associata alla forma bilineare F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \text{V}=\{(x,y,z,w) \mid x-y+z-w=0\}$$

   Trovare $V^{\perp}$ rispetto ad F.

2. Siano V=$\{(x,y,z) \mid x-y+z=0\}$ e W=$\{(x,y,z) \mid x+2y=0\}$ due sottospazi di $\mathbb{R}^3$.
   Trovare $(V \cap W)^{\perp}$ rispetto al prodotto scalare standard.

3. Siano S=$\{(x,y,z,w) \mid x+y+z-w=0;\ x+2y=0\}$ e
   T=$\{(x,y,z,w) \mid x+y-z=0;\ x+2y=0\}$ due sottospazi di $\mathbb{R}^4$.
   Sia F, una forma bilineare rispetto alla base canonica, rappresentata dalla matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   Trovare una base di $(S+T)^{\perp}$.

4. Calcolare il cono isotropo in $\mathbb{R}^3$ rispetto alla forma bilineare:
   F$(\bar{x}, \bar{y}) = 5x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 + 4x_3y_3$

5. Sia V un K-spazio vettoriale e sia F: $V \times V \to K$ una forma bilineare simmetrica.

   - Sia S$\subseteq$V. Dimostrare che $S^{\perp}$ è sottospazio vettoriale di V.
   - Far vedere che il cono F-isotropo $I_F(V)$ non è in generale un sottospazio vettoriale di V.
     Tuttavia se $I_F(V) \neq \{0\}$ allora $I_F(V)$ è unione (insiemistica) di sottospazi vettoriali 1-dimensionali.

6. Sia V=$\mathbb{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado al piú 3 con il polinomio nullo, a coeffiecienti in $\mathbb{R}$, dotato del prodotto scalare standard:
   $\langle a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3,\ b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

   - Dopo aver verificato che i seguenti polinomi costituiscono una base di V, applicare ad essi il processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt:
   $$x+1,\ x+x^2,\ 2-x-x^3,\ x^3$$
   - Dato il sottospazio U=$\langle x^3-1,\ x+2\rangle$ di V calcolare le equazioni cartesiane e parametriche di $U^\perp$. Scrivere poi una base ortonormale di U e di $U^\perp$.

7. Applicare Gram-Schmidt per determinare una base ortonormale dei sottospazi di $\mathbb{R}^3$ dotati del prodotto scalare standard e generati dai seguenti vettori:
   A=$\langle(1,1,1),(1,0,1),(3,2,3)\rangle$
   B=$\langle(1,1,1),(-1,1,-1),(1,0,1)\rangle$

8. - Verificare che:
     F$(\bar{x},\bar{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_3$
     è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$.
   - Risolvere l'esercizio 7 sostituendo al posto del prodotto scalare standard il prodotto scalare F del primo punto.