Università degli Studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica
GE210 - Geometria 2 – A.A. 2014-2015
Prima prova in itinere

Esercizio 1. Sia dato uno spazio vettoriale V su $\mathbb{C}$. Sia $B : V \times V \to \mathbb{C}$ una forma bilineare simmetrica su V. Dimostrare che il cono isotropo $\mathscr{C}_B(V)$ è non banale.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia B un prodotto scalare su V. Dato W un sottospazio di V, si indichi con $W^\perp$ il complemento ortogonale di W. Dimostrare che, se U e W sono sottospazi di V, allora si ha:

$$(W + U)^\perp = W^\perp \cap U^\perp.$$

Esercizio 3. Si consideri la forma quadratica $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da

$$q(x, y, z) = 2\lambda x^2 - 6xy + 2y^2 + 8yz + 2z^2,$$

al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$. Sa poi B la forma bilineare polare di q.

(i) Scrivere esplicitamente l'espressione che definisce B.

(ii) Stabilire per quali valori di λ la forma B è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$.

Si ponga $\lambda = 1$.

(iii) Diagonalizzare q, esplicitando la base diagonalizzante usata.

(iv) Calcolare rango e segnatura di q.

(v) Trovare, se esistono, due basi di $\mathbb{R}^3$ per cui le matrici associate a B siano

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rispettivamente.

(vi) Provare che il cono isotropo di B è non banale e trovare in esso due rette vettoriali distinte.

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sia $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'applicazione bilineare simmetrica associata ad A rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(i) Scrivere esplicitamente le equazioni di B e della forma quadratica q ad essa associata.

(ii) Provare che B è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ e determinare il suo cono isotropo.

(iii) Ortonormalizzare la base canonica di $\mathbb{R}^3$ rispetto al prodotto scalare B.

(iv) Trovare una matrice invertibile $P \in GL_3(\mathbb{R})$ tale che la matrice $P^T A P$ sia diagonale.

(v) Dato $W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0 \}$, determinare il complemento ortogonale $W^\perp$ rispetto a B e trovare una sua base ortonormale.

Esercizio 5. Nello spazio euclideo standard $(\mathbb{E}^3(\mathbb{R}), \langle\, ,\, \rangle)$ si consideri il piano vettoriale $\pi : \; x + y = 0$. Sia w un generatore del suo complemento ortogonale $\pi^\perp$. Si consideri l'applicazione

$$\begin{aligned} S_\pi : \; \mathbb{E}^3(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{E}^3(\mathbb{R}) \\ v &\longmapsto v - 2\,\frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} w \end{aligned}$$

(i) Provare che S_π è un operatore lineare unitario.

(ii) Trovare la matrice P di S_π rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(iii) Determinare gli elementi di $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ che vengono fissati sotto l'azione di S_π ed interpretare geometricamente il risultato ottenuto.

(iv) Determinare gli autospazi di S_π ed interpretare geometricamente quanto trovato.

Esercizio 6. (i) Siano dati nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ due piani non paralleli π_1 e π_2. Sia poi r una retta che incontra rispettivamente π_1 nel punto Q_1 e π_2 nel punto $Q_2 \neq Q_1$. Dimostrare che esiste un'affinità $f : \mathbb{A}^3(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ tale che $f(\pi_1) = \pi_2$ e $f(r) = r$. È unica tale affinità?

(ii) Siano date in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ le rette:

$$r : \; y = 0 \qquad s : \; y = 2 \qquad t_1 : \; y = x \qquad t_2 : \; x = 3.$$

Trovare, se esiste, un'affinità $f : \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ tale che

$$f(r) = r \qquad f(s) = s \qquad f(t_1) = t_2$$