Università degli Studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2014-2015
GE210 - Geometria 2
Prova in preparazione al primo esonero

Esercizio 1. Siano dati nel piano affine reale $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ le rette

$$r: \; y = 0, \qquad s: \; y = x, \qquad t: \; x = 0$$

ed i punti

$$A = (1, 0), \qquad B = (2, 2), \qquad C = (0, -1).$$

Stabilire se esiste un'affinità $f : \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ tale che

$$f(r) = s, \qquad f(s) = t, \qquad f(A) = B, \qquad f(B) = C$$

ed in caso affermativo, determinarla esplicitamente.
Stabilire inoltre se tale affinità è unica.

Esercizio 2. Si consideri la forma quadratica $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da

$$q(x, y, z) = 6xz + 6yz - 2xy - x^2 - y^2 - 9z^2.$$

(i) Detta B la forma bilineare simmetrica polare di q, determinare la matrice di B associata rispetto alla base $\{\, (-1, 1, 1), (2, 1, 0), (0, 0, 1) \,\}$ di $\mathbb{R}^3$.

(ii) Determinare il rango e la segnatura di q.

(iii) Stabilire se il cono isotropo di $\mathbb{R}^3$ rispetto a B è banale.

(iv) Determinare il radicale di $\mathbb{R}^3$ rispetto a B.

(v) Sia

$$W = \left\{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = y \,\right\}.$$

Determinare il complemento ortogonale $W^\perp$ di W rispetto alla forma B. Dire inoltre se

$$W \oplus W^\perp = \mathbb{R}^3.$$

Esercizio 3. Siano dati gli operatori lineari di $\mathbb{R}^2$ definiti da:

(i) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $F(1, 0) = (\frac{1}{2}, \, \frac{1}{2})$, $\quad F(0, 1) = (-\frac{1}{2}, \, \frac{1}{2})$

(ii) $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $F(1, 0) = (\frac{5}{13}, \, \frac{12}{13})$, $\quad F(0, 1) = (-\frac{12}{13}, \, \frac{5}{13})$

(iii) $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $F(1, 0) = (-\frac{3}{7}, \, -\frac{\sqrt{40}}{7})$, $\quad F(0, 1) = (-\frac{\sqrt{40}}{7}, \, \frac{3}{7})$

Stabilire quali tra essi sono operatori unitari. Distinguere tra questi le rotazioni e le simmetrie. Determinare l'angolo di rotazione per le rotazioni e l'asse di simmetria per le simmetrie.