Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercizi Pre-esonero

A.A. 2015-2016 - Docente: Prof. A. Verra
Tutori: Francesco Di Tullio e Manuela Donati

1. Dopo aver verificato che i vettori $\{(0,1,1);(1,2,0);(-1,1,0)\}$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$, ortonormalizzare tale base.

2. Calcolare i valori dei parametri a,k,h,m in modo tale che i vettori
$$a(k,2,0,1), \quad 2a(0,h,1,1), \quad a(2,2,1,m)$$
costituiscano una terna di vettori ortonormali di $\mathbb{R}^4$.

3. Dato lo spazio vettoriale $C([-1,1])$, nel quale é stato introdotto il prodotto scalare
$$< f,g >= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$
si consideri il sottospazio generato dalle funzioni $f_1(x)=1$, $f_2(x)=x$, $f_3(x)=x^2$. Si determini una base ortonormale di tale sottospazio.

4. Nello spazio $M_{n,n}(\mathbb{R})$ definiamo una legge che ad ogni coppia di matrici A,B faccia corrispondere il numero
$$< A,B >= tr(A^T B).$$
Dimostrare che tale legge é un prodotto scalare in $M_{n,n}(\mathbb{R})$.
(Ricorda che $tr(A)=tr(A^T)$ e che $tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$)

5. Sia $\mathbb{A}$ un piano affine; siano r,s,t rette affini di $\mathbb{A}$ aventi direzioni (cioé giaciture) distinte e siano r',s',t' rette aventi direzioni distinte; dimostrare che esiste un'unica affinitá tale che $f(r)=r'$, $f(s)=s'$, $f(t)=t'$.

6. Considerare lo spazio affine $A^2(\mathbb{R})$ e le terne di punti $P_1=(-1,1)$, $P_2=(-2,3)$, $P_3=(0,3)$, $Q_1=(1,2)$, $Q_2=(1,3)$, $Q_3=(5,1)$. Trovare le equazioni dell'applicazione affine f che porta P_i in Q_i con $i=1,2,3$.

7. Considerare lo spazio affine $A^2(\mathbb{R})$ e le terne di rette assegnate mediante le equazioni cartesiane
$$r: X=1 \quad s: Y=X \quad t: Y=-2$$
$$r': 2X-Y=0 \quad s': X+Y=0 \quad t': 2X+Y=1$$
Trovare le equazioni dell'affinitá tale che $f(r)=r'$, $f(s)=s'$, $f(t)=t'$.

8. Si considerino i punti $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, -1, 3)$, $C = (-1, 0, 1)$.

   - Verificare che i punti A, B, C non sono allineati.
   - Calcolare l'area del triangolo di vertici A, B, C.
   - Calcolare il volume del quadrilatero di vertici A, B, C, D con $D = (3, 3, 3)$.
   - Calcolare il coseno dell'angolo formato dai lati AB e BC del triangolo. L'angolo da essi formato é acuto o ottuso?
   - Dato il piano di equazione $\gamma : 3X + 2Y + Z + 1 = 0$. Dire se la retta passante per i punti A e B é parallela a γ.
   - Determinare per quali valori di α la retta di equazioni parametriche

     $$\begin{cases} X = 1 + \alpha t \\ Y = 1 + t \\ Z = 1 + 2t \end{cases}$$

     é parallela al piano γ
   - Data la retta $r : X+2Y+3 = 0$ e il punto $P = (1, 0)$. Determinare la distanza da P a r

9. Data A la matrice simmetrica

   $$\begin{pmatrix} h & 0 & h \\ 0 & h & 0 \\ h & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   - Dire per quali valori di h la matrice A rappresenta un prodotto scalare.
   - Dato $W =< (0, 0, 1), (0, 1, 0) >$. Calcolare la dimensione del suo ortogonale al variare di h.