Università degli Studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2014-2015
GE210 - Geometria 2
Esercitazione n.2

Esercizio 1. Dato uno spazio vettoriale V, dimostrare che una qualsiasi proiettività f di $\mathbb{P}(V)$ è biunivoca. Provare che f^{-1} è anch'essa una proiettività e determinare l'automorfismo di V ad essa associato. Se rispetto ad un sistema di riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ la matrice associata ad f è la matrice A, qual è la matrice associata ad f^{-1}?

Esercizio 2. Determinare la proiettività f di $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ tale che

$$f[1,1] = [1,-1], \qquad f[1,0] = [3,-1], \qquad f[0,1] = [2,2].$$

Trovare l'insieme dei punti fissi di f. Scrivere le equazioni della proiettività inversa f^{-1}.

Esercizio 3. Determinare, se esiste, la proiettività f di $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ tale che

$$f[2,1] = [1,2], \qquad f[-1,-1] = [1,1], \qquad f[0,1] = [2,-1].$$

Trovare l'insieme dei punti fissi di f. Scrivere le equazioni della proiettività inversa f^{-1}.

Esercizio 4. Esiste una proiettività f di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tale che

$$f[2,1] = [2,1], \qquad f[1,1] = [2,2], \qquad f(0,1) = (0,1)?$$

In caso affermativo, scriverne le equazioni e stabilire se è unica.

Esercizio 5. Si consideri la proiettività F di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ associata alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determinare i punti fissi di F. Provare inoltre che la retta $X_0 = 0$ è fissata da F mentre la retta $X_2 = 0$ è un luogo di punti fissi per F.

Esercizio 6. Determinare tutte le proiettività F della retta proiettiva complessa $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ tali che

$$F[1,i] = [i,i] \qquad F[1,-1] = [2,i].$$

Trovare i punti fissi e le rette fisse sotto l'azione di F. Scrivere le equazioni della proiettività inversa F^{-1}.

Esercizio 7. Determinare la proiettività di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ che lascia fissi i punti $[1,0]$ e $[-1,2]$ e che manda il punto $[3,2]$ in $[1,1]$. Scrivere le equazioni della proiettività inversa.

Esercizio 8. Siano dati i punti

$$P_0[1,0,1] \qquad P_1[1,1,-2] \qquad P_2[0,1,1] \qquad P_3[0,-1,0]$$

ed i punti

$$Q_4[3,0,2] \qquad Q_1[1,2,-3] \qquad Q_2[1,1,1] \qquad Q_3[1,-1,1].$$

Verificare che i punti P_i sono in posizione generale. Verificare che anche i punti Q_i sono in posizione generale. Trovare una proiettività F di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che $F(P_i) = Q_i$ per ogni $i = 0, \dots, 3$. Dire inoltre se tale proiettività è unica. Trovare i punti fissi e le rette fisse sotto l'azione di F. Scrivere le equazioni della proiettività inversa F^{-1}.

Esercizio 9. Si consideri la proiettività F di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ associata alla matrice $\begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Determinare i punti fissi e le rette fisse di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sotto l'azione di F. Scrivere le equazioni della proiettività inversa F^{-1}.

Esercizio 10. Si consideri la proiettività F di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ associata alla matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Determinare i punti fissi e le rette fisse di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sotto l'azione di F. Scrivere le equazioni della proiettività inversa F^{-1}.

Esercizio 11. Trovare una proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che fissa due punti ma che non fissa punto per punto la retta che li congiunge.

Esercizio 12. Trovare tutte le proiettività f di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tali che

$$f[1,0,0] = [-1,1,2] \qquad f[2,1,-1] = [2,1,-1].$$

Esercizio 13. Trovare una proiettività f di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che lascia fissi il punto $P[1,0,1]$ e la retta $r: \ X_0 + X_1 + X_2 = 0$. Trovare tutti i punti fissi e le rette fisse sotto l'azione di f. Scrivere le equazioni della proiettività inversa f^{-1}.

Esercizio 14. Determinare la controimmagine di $P[3,-2]$ mediante la proiettività di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ rappresentata dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Esercizio 15. Classificare le seguenti coniche proiettive e per ciascuna di esse determinare i punti impropri (rispetto ad X_0), dare la loro forma canonica e trovare una proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che le porta in forma canonica:

(i) $X_0^2 + 2X_1^2 + X_3^2 = 0$;

(ii) $X_1^2 - X_2^2 + X_0X_1 - X_0^2 = 0$;

(iii) $X_0X_1 + X_0X_2 + X_1X_2 = 0$;

(iv) $X_0^2 + 2X_0X_2 - 2X_1X_2 = 0$;

(v) $X_1^2 - 2X_1X_2 + 2X_2X_0 - X_0^2 = 0$;

(vi) $X_0^2 + 2X_0X_1 = 0$;

(vii) $X_0^2 + 6X_0X_1 + 9X_1^2 = 0$;

(viii) $X_0^2 + X_0X_1 + X_1^2 + X_1X_2 = 0$;

(ix) $X_1X_2 - X_0X_1 + X_0^2 = 0$;

(x) $2X_0^2 + X_0X_1 - X_1^2 - 2X_2^2 + 3X_1X_2 = 0$.

Scelte due coniche proiettivamente equivalenti tra quelle classificate, si dia esplicitamente una proiettività che trasforma la prima nella seconda.