Università degli Studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2014-2015
AL210 - Algebra 2
Foglio di esercizi n.2
Antonio Cigliola

Esercizio 1. Sia $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$. Provare che, se la norma di α è un numero primo, allora α è un elemento primo di $\mathbb{Z}[i]$.

Esercizio 2. Provare che, se $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ hanno norme coprime, allora $(\alpha, \beta) = \mathbb{Z}[i]$.

Esercizio 3. Trovare il massimo comun divisore tra le seguenti coppie di interi di Gauss:

(i) $\alpha = 4 + i$ e $\beta = 5i$;

(ii) $\alpha = 4 + i$ e $\beta = 1 - i$;

(iii) $\alpha = 6 + 3i$ e $\beta = 5i$;

(iv) $\alpha = 3 + i$ e $\beta = i - 5$.

Esercizio 4. Determinare un generatore per i seguenti ideali di $\mathbb{Z}[i]$:

(i) $(5, 3i - 1)$;

(ii) $(3 + i, 2i - 1)$;

(iii) $(2i - 3, 6i + 1)$.

Esercizio 5. Fattorizzare come prodotto di irriducibili gli elementi 13, $-4+3i$, $6-6i$, $2-3i$ di $\mathbb{Z}[i]$.

Esercizio 6. Descrivere i seguenti quozienti e stabilire quali tra essi sono domini o campi:

(i) $\dfrac{\mathbb{Z}[i]}{(3i)}$;

(ii) $\dfrac{\mathbb{Z}[i]}{(13)}$;

(iii) $\dfrac{\mathbb{Z}[i]}{(4i-3)}$;

(iv) $\dfrac{\mathbb{Z}_3[x]}{(x^3 + x^2 + 2)}$;

(v) $\dfrac{\mathbb{Z}_3[x]}{(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2)}$.

Esercizio 7. Siano dati il polinomio $f(x) = x^2 + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$ e l'anello $R = \frac{\mathbb{Z}_3[x]}{(f(x))}$.

(i) Calcolare la cardinalità di R.

(ii) Determinare il gruppo degli elementi invertibili di R e dire se si tratta di un gruppo ciclico.

(iii) Calcolare gli zero divisori di R.

Esercizio 8. Siano dati il polinomio $f(x) = x^4 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ e l'anello $R = \frac{\mathbb{Z}_2[x]}{(f(x))}$.

(i) Calcolare la cardinalità di R.

(ii) Determinare il gruppo degli elementi invertibili di R e dire se si tratta di un gruppo ciclico.

(iii) Calcolare gli zero divisori di R.

Esercizio 9. Siano dati il polinomio $f(x) = x^4 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ e l'anello $R = \frac{\mathbb{Z}_2[x]}{(f(x))}$.

(i) Calcolare la cardinalità di R.

(ii) Determinare il gruppo degli elementi invertibili di R e dire se si tratta di un gruppo ciclico.

(iii) Calcolare gli zero divisori di R.