Università degli Studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2013-2014
GE110 - Geometria 1
Foglio n.3 - Antonio Cigliola

Esercizio 1. Dimostrare che l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare a coefficienti in un campo K è uno spazio vettoriale su K se e solo se il sistema è omogeneo.

Esercizio 2. Sia $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ l'insieme delle serie numeriche convergenti a termini reali positivi. Dimostrare che $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Esercizio 3. Dimostrare che $\mathbb{C}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Il campo $\mathbb{C}$ è anche uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$? Ed $\mathbb{R}$ su $\mathbb{Q}$?

Esercizio 4. Sia

$$\mathbb{Q}(i) = \{\, a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q} \,\},$$

dotato delle naturali operazioni di somma e di moltiplicazione con gli elementi di $\mathbb{Q}$. Dimostrare che $\mathbb{Q}(i)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$. Lo è anche su $\mathbb{R}$?

Esercizio 5. Sia

$$\mathbb{Q}(\pi) = \{\, f(\pi) \mid f(x) \in \mathbb{Q}[x] \,\},$$

dotato delle naturali operazioni di somma e di moltiplicazione con gli elementi di $\mathbb{Q}$. Dimostrare che $\mathbb{Q}(\pi)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$. Lo è anche su $\mathbb{R}$?

Esercizio 6. Sia

$$\mathcal{A} = \left\{\, f(x) \in \mathbb{Z}_7[x] \,\middle|\, f(\overline{1}) = \overline{0} \,\right\},$$

dotato delle naturali operazioni di somma e di moltiplicazione con gli elementi di $\mathbb{Z}_7$. Provare che $\mathcal{A}$ è uno $\mathbb{Z}_7$-spazio vettoriale. Spiegare infine perché l'insieme

$$\mathcal{B} = \left\{\, f(x) \in \mathbb{Z}_7[x] \,\middle|\, f(\overline{1}) = \overline{1} \,\right\}$$

non è uno spazio vettoriale.

Esercizio 7. Dimostrare che l'insieme delle matrici quadrate simmetriche a coefficienti in un campo K è uno spazio vettoriale su K. Vale lo stesso per le matrici antisimmetriche?

Esercizio 8. Siano F e K due campi tali che $F \subseteq K$. Sia V uno spazio vettoriale su K. Dimostrare che V è in maniera naturale anche uno spazio vettoriale su F.