Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017
GE210 - Geometria 2 - Tutorato II

Docente: Prof. Alessandro Verra
Tutori: Silvia Mattiozzi e Manuela Donati

1. Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti in $\mathbb{R}$. Sia data la matrice
$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$
e l'applicazione $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ così definita: $f(A, B) = Tr({}^tAMB)$.

   a) Dimostrare che f è una forma bilineare su V.
   b) Determinare la matrice di f rispetto alla base canonica di V
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   Stabilire se f è non degenere (simmetrica, antisimmetrica).
   c) Sia M generica. Caratterizzare le matrici M per le quali f è non degenere (simmetrica, antisimmetrica).
   d) Caratterizzare le matrici M per le quali f è simmetrica (antisimmetrica) per $V = M_n(\mathbb{R})$.
   (Suggerimento: Utilizzando le proprietà della traccia è sufficiente caratterizzare le matrici M per le quali f è nulla.)

2. Sia lo spazio vettoriale euclideo $V = (\mathbb{R}^4, < . >)$ dove $< . >$ è il prodotto scalare standard. Sia W lo spazio generato dai vettori
$$(1, 1, 0, 1) \quad (1, -1, 0, -1) \quad (3, 1, 0, 1)$$
   Determinare la dimensione di W, trovare una base ortonormale per W ed estendere tale base a una base ortonormale di V.

3. Sia $k \in \mathbb{R}$. Si consideri la forma quadratica su $\mathbb{R}^4$ definita da $Q : 2kx_1x_4+2x_2x_3$.
   a) Determinare la matrice associata a Q rispetto alla base canonica.
   b) Al variare di k, determinare la dimensione del completamento ortogonale rispetto a Q del sottospazio $U =< (1, 0, 0, -1), (1, 1, 0, 0), (1, -1, 1, -1) >$.

4. Diagonalizzare la matrice A al variare di $k \in \mathbb{R}$
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -k & -1 \\ -k & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Trovare le rette e i punti fissi delle seguenti affinità:
   a)
$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$
   b)
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$
   c)
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

6. Trovare, utilizzando il Teorema Spettrale, una matrice ortogonale che diagonalizzi la matrice $S_t := \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix}$ al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$ e scriverne la corrispondente forma diagonale.

7. Sia $\mathbb{A} = \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ uno spazio affine con riferimento affine $(O, \mathbb{E})$.
   a) Determinare l'equazione di ogni affinità f che fissa i punti della retta di equazione $x + y - 1 = 0$.
   b)Considerati i punti $P = (1, 2)$, $Q = (2, 1) \in \mathbb{A}$, tra le affinità considerate nel punto a determinare quelle (eventuali) che trasformano P in Q.