**Sapienza Università di Roma**
**Corso di laurea in Ingegneria Energetica**
**Geometria - Soluzioni di temi d'esame**
**prof. Cigliola**

# Novembre 2014

**Esercizio 1.** **I)** L'inversa della matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(a) non esiste.

(b) è $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) è $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

(d) è $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

**Svolgimento.** Il determinante vale 1, la matrice ammette inversa. Il modo più conveniente di procedere è svolgendo il prodotto riga per colonna con le diverse opzioni. La risposta esatta è la (b).

**II)** Un sistema lineare di 3 equazioni in 7 incognite a coefficienti reali

(a) può essere solo indeterminato.

(b) può essere solo impossibile.

(c) non può avere una sola soluzione.

(d) ammette $\infty^4$ soluzioni.

**Svolgimento.** Un tale sistema, se compatibile, può avere rango che varia da 4 a 6. Nulla toglie che il sistema sia impossibile. La risposta esatta è la (c).

**III)** La conica $\mathscr{C}:\ 2x^2 + 5xy - 2x + 2y^2 - y = 0$

(a) è un'ellisse.

(b) è una parabola.

(c) è degenere.

(d) è un'iperbole.

**Svolgimento.** La matrice associata ha determinante nullo. La risposta esatta è la (c).

**IV)** Sia dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ così definito:

$$W = \{(t+s,\, -t,\, s) \,|\, t, s \in \mathbb{R}\}$$

Rispetto al prodotto scalare standard, una base ortonormale di $W$

(a) è $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\,-1,\,0),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(1,\,1,\,-2)\right\}$.

(b) non esiste.

(c) è $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\,-1,\,0),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,\,-1,\,-2)\right\}$.

(d) è $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\,-1,\,0),\ \sqrt{6}(1,\,1,\,2)\right\}$

**Svolgimento.** Un sottospazio non banale ha necessariamente una base. I vettori in (d) non sono normalizzati. L'equazione cartesiana di $W$ è $x_1+x_2-x_3=0$. Il secondo vettore in (a) non verifica l'equazione. La risposta esatta è la (c).

**V)** In $\mathbb{R}^4$ siano dati i vettori

$$v_1=(1,0,1,0) \qquad v_2=(0,1,-1,0) \qquad v_3=(-2,0,1,0) \qquad v_4=(1,0,2,0)$$

Siano poi $U=\mathcal{L}(v_1,\,v_2)$ e $W=\mathcal{L}(v_3,\,v_4)$. Allora

(a) I vettori $v_1,\,v_2,\,v_3,\,v_4$ sono una base di $\mathbb{R}^4$.

(b) $\mathbb{R}^4=U\oplus W$.

(c) $\dim U\cap W=2$

(d) una base di $U\cap W$ è $\{(-2,0,-2,0)\}$.

**Svolgimento.** La matrice che ha per righe i quattro vettori ha la quarta colonna nulla (lo si poteva osservare subito anche ad occhio senza costruirla). Pertanto i vettori sono dipendenti e le opzioni (a) e (b) non sono corrette. Poiché sia $U$ che $W$ han dimensione 2 (lo si controlli), se è vera (c) sono spazi uguali. Ma non è così, infatti $v_3$ e $v_4$ hanno la seconda componente nulla mentre $v_2$ no. La risposta esatta è la (d).

**Esercizio 2.** Per quali valori del parametro reale $k$ la matrice

$$A=\begin{pmatrix}3-k & -k & 1\\ k-1 & k+2 & -1\\ k+1 & k & 3\end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile? In corrispondenza di tali valori si determini una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori per $A$.

**Svolgimento.** Il polinomio caratteristico è indipendente da $k$: $p(\lambda)=-\lambda^3+8\lambda^2-20\lambda+16=-(\lambda-4)(\lambda-2)^2$. Si hanno i due autovalori $\lambda_1=4$ con m.a.$(4)=$ m.g.$(4)=1$ e $\lambda_2=2$ con m.a.$(2)=2$. La matrice dei coefficienti dell'autospazio associato a $\lambda_2$ è $\begin{pmatrix}1-k & -k & 1\\ k-1 & k & -1\\ k+1 & k & 1\end{pmatrix}$. Essa non ha mai rango 3, ha rango 2 per $k\neq 0$ e rango 1 per $k=0$. Pertanto l'autospazio $E(2)$ ha dimensione 2 solo per $k=0$ e in tal caso la matrice $A$ è diagonalizzabile. Per $k=0$, un autovettore associato a $\lambda_1=4$ è dato risolvendo il sistema lineare $\begin{cases}-x+z=0\\ -x-2y-z=0\\ x-z=0\end{cases}$ Si ottiene $v_1=(1,-1,1)$. Una base di $E(2)$ è data risolvendo il sistema omogeneo $\begin{cases} x+z=0 \\ -x-z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$ che dà i vettori $v_2 = (0,1,0)$ e $v_3 = (1,0,-1)$. Infine, per $k = 0$, una base di $\mathbb{R}^3$ di autovettori per $A$ è data da $\{ v_1, v_2, v_3 \}$.

**Esercizio 3.** Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tale che

$$F \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + y_1 & x_2 - y_2 \\ 3x_3 & 2x_3 - x_1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare la matrice di $F$ rispetto alle basi canoniche.

(ii) Trovare una base e la dimensione per $\operatorname{Ker} F$ e per $\operatorname{Im} F$.

**Svolgimento.** Indicate le matrici canoniche di tipo $3 \times 2$ come di consueto, si ha facilmente che $F(e_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $F(e_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $F(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $F(e_4) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $F(e_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $F(e_6) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Sistemate ordinatamente le entrate di tali matrici nelle colonne, si ottiene la matrice canonica di $F$: $M(F) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
Il rango di $M(F)$ è 4. Quindi $\operatorname{Im} F = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Mentre $\dim(\operatorname{Ker}(F)) = 6 - 4 = 2$ ed una sua base è facilmente trovata leggendo le colonne di $M(F)$. Un vettore è sicuramente $e_6$ poiché la sua immagine è il vettore nullo. Un altro è dato da $e_3 + e_4$ poiché $F(e_3 + e_4) = F(e_3) + F(e_4)$ dà la matrice nulla.

**Esercizio 4.** È dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 + x_5 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases} \qquad (*)$$

(i) Stabilire se $\mathbf{x}_0 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, 0, 0\right)$ è una soluzione del sistema $(*)$.

(ii) Stabilire se le quintuple $\mathbf{v}_1 = (0, 4, -6, 0, 10)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 0, 0, -1)$ e $\mathbf{v}_3 = (5, -11, 14, 5, 0)$ sono soluzioni del sistema lineare omogeneo associato a $(*)$.

(iii) Risolvere il sistema $(*)$.

**Svolgimento.** Con semplici calcoli si verifica che $\mathbf{x}_0$ è soluzione del sistema $(*)$. Si trova poi che $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_3$ sono soluzioni dell'omogeneo associato mentre $\mathbf{v}_2$ no. Poiché il rango della matrice associata a $(*)$ vale tre, il sistema ammette $\infty^{5-3} = \infty^2$ soluzioni. Inoltre si verifica immediatamente che $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_3$ sono indipendenti; questi allora costituiscono una base dello spazio delle soluzioni dell'omogeneo associato a $(*)$. Allora più brevemente, una soluzione di $(*)$ è data dalla somma della soluzione particolare $\mathbf{x}_0$ più una qualsiasi soluzione dell'omogeneo associato: $S = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2$, al variare di $s$ e $t$ in $\mathbb{R}$. Risolvere il sistema a mano è decisamente meno conveniente.

**Esercizio 5.** Nello spazio euclideo sono date le due rette:

$$r_k : \begin{cases} x = 1 + kt \\ y = 2 - kt \\ z = -1 + 2t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} x - 2z - 3 = 0 \\ y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$$

(a) Per quali valori di $k$ le rette $r_k$ ed $s$ sono parallele?

(b) Perquali valori di $k$ le rette $r_k$ ed $s$ sono perpendicolari?

(c) Per $k = 1$, trovare, se esiste, un piano parallelo ad $r$ e contenente $s$.

(d) Per $k = 4$, trovare, se esiste, un piano parallelo ad $s$ e contenente $r$.

**Svolgimento.** I vettori direzionali sono rispettivamente $v_r(k, -k, 2)$ e $v_s(2, -2, 1)$ (per le eq. parametriche di $s$ conviene usare $z$ come parametro). Allora le rette sono parallele se e solo se $v_r = 2v_s$ e quindi $k = 4$. Il prodotto scalare dei due vettori è $v_r \cdot v_s = 4k + 2$, quindi le rette sono ortogonali per $k = -\frac{1}{2}$. Per $k = 1$ le rette non sono parallele. Sostituendo le eq. parametriche di $r$ in $s$, si trova che le rette non sono neanche incidenti. Il piano cercato è unico ed è dato dal piano passante per un punto di $s$ e con vettori generatori $v_r$ e $v_s$. Questo è il piano $\alpha : \ x + y - 7 = 0$. Per $k = 4$ le rette sono parallele, quindi ogni piano parallelo ad una è parallelo all'altra. In particolare ogni piano contenente $r$ è parallelo ad $s$. Uno lo si legge facilmente dalle eq. cartesiane di $r$: $\alpha : \ x - 2z - 3 = 0$.

## Gennaio 2015 - Prova 1

**Esercizio 1.** I) Data una matrice $A$ quadrata di ordine 3 e di rango 2, allora

(a) $A + A^T$ ha rango 2.

(b) $A^T + A$ ha rango al più 2.

(c) $\mathrm{rk}(A + A^T) = \mathrm{rk}\, A + \mathrm{rk}\, A^T$.

(d) nessuna delle affermazioni precedenti è in generale corretta.

**Svolgimento.** La (c) è palesemente falsa: una matrice di ordine 3 non può avere rango 4. In realtà anche (a) e (b) sono false. Cerchiamo come controesempio una matrice di ordine 3 di rango 2 che sommata alla sua trasposta dà una matrice invertibile. Dopo un po' di tentativi si ottiene ad esempio la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La risposta esatta è la (d).

II) Siano dati nel piano i punti

$$A(1,1) \qquad B(2,0) \qquad C(3,3).$$

(a) Il triangolo di vertici $A, B$ e $C$ ha area 2.

(b) $\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \| = 6$.

(c) I punti $A, B$ e $C$ sono allineati.

(d) Il parallelogramma di lati $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$ è un rettangolo.

**Svolgimento.** Non val la pena di tirare in ballo il prodotto vettoriale. Disegnati i punti il calcolo delle aree dei triangoli coinvolti è immediato. La risposta esatta è la (a). Si badi che il triangolo è rettangolo in $B$.

III) La conica $\mathscr{C}: \ x^2 - xy - x + y^2 = 0$ è

(a) un punto.

(b) una parabola.

(c) unione di due rette.

(d) un'ellisse.

**Svolgimento.** La matrice della conica ha rango tre e la parte quadratica ha determinante positivo. La risposta esatta è la (d).

IV) Sia dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ così definito:

$$W = \mathcal{L}((1,0,0,-1),\ (0,1,0,1),\ (\pi,\pi,0,0)).$$

Allora

(a) $W^\perp$ è vuoto.

(b) $\dim W^\perp = 1$.

(c) $W^\perp = \mathcal{L}((1,-1,1,1),\ (0,0,2,0))$.

(d) $W^\perp = \mathcal{L}((-1,-1,1,1),\ (0,0,1,0))$.

**Svolgimento.** Il complemento ortogonale non è mai vuoto (falsa la (a)). I generatori di $W$ non sono indipendenti, quindi è falsa la (b). Nella (d) il primo vettore di $W^\perp$ non è ortogonale al primo vettore di $W$. Allora è falsa la (d). La risposta esatta è la (c).

V) Sono assegnati quattro numeri. Si sa che, sommando ciascuno di essi alla media aritmetica degli altri tre, si ottengono rispettivamente i numeri 25, 37, 43, 51. Qual è la media aritmetica dei quattro numeri assegnati?

(a) 17,5

(b) 19,5

(c) 23,5

(d) 29,5

**Svolgimento.** Siano detti $x, y, z, t$ i numeri cercati. Dalle ipotesi abbiamo che
$$\begin{cases} x + \frac{y+z+t}{3} = 25 \\ y + \frac{x+z+t}{3} = 37 \\ z + \frac{y+x+t}{3} = 43 \\ t + \frac{y+z+x}{3} = 51 \end{cases}$$

che equivale a $\begin{cases} 3x + y + z + t = 25 \cdot 3 \\ 3y + x + z + t = 37 \cdot 3 \\ 3z + y + x + t = 43 \cdot 3 \\ 3t + y + z + x = 51 \cdot 3 \end{cases}$ Sommando membro a membro tutte le equazioni si ottiene $6(x+y+z+t) = (25+37+43+51)\cdot 3$, ovvero $x+y+z+t = \frac{25+37+43+51}{2}$. La media aritmetica cercata è $\dfrac{x+y+z+t}{4} = \dfrac{25+37+43+51}{8} = 19,5$. La risposta esatta è la (b).

**Esercizio 2.** Si considerino i sistemi lineari

$$S: \begin{cases} x_1 - x_2 + kx_4 = 1 \\ x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + (k-2)x_4 = k \end{cases} \qquad \text{e} \qquad SO: \begin{cases} x_1 - x_2 + kx_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + (k-2)x_4 = 0 \end{cases}$$

(i) Discutere e risolvere al variare di $k \in \mathbb{R}$ il sistema $S$.

(ii) Spiegare perché l'insieme $U_k$ delle soluzioni del sistema $SO$ non è vuoto ed è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

(iii) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare un supplemento di $U_k$ in $\mathbb{R}^4$.

(iv) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, stabilire se esiste un isomorfismo $F : U_k \to \mathbb{R}^3$.

**Svolgimento.** La matrice completa di $S$ è $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & k-2 & k \end{array}\right)$ Osserviamo che le prime due colonne sono proporzionali e che la prima, la terza e la quarta producono un determinante nullo. Allora il rango della matrice incompleta vale 2 per ogni valore di $k$. Nella completa prendiamo prima, terza e quinta colonna. Si ottiene il determinante $k+1$. Allora per $k=-1$ il sistema è impossibile e per $k=-1$ è indeterminato con $\infty^2$ soluzioni date da $\{\,(1+x_2+x_4,\, x_2,\, -1+x_4,\, x_4) \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\,\}$. $SO$ è un sistema omogeneo, quindi l'insieme delle sue soluzioni non è vuoto ed è in particolare un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ (per ogni valore di $k$). Dallo studio precedente si deduce che $\dim U_k = 2$, per ogni valore di $k$. Una base di $U_k$ è data da $\{\,(1,1,0,0),\,(-k,0,1,1)\,\}$. Per completarla ad una base di $\mathbb{R}^4$, si prendano i vettori $(1,0,0,0)$ e $(0,0,0,1)$ che funzionano per ogni valore di $k$. Infine, poiché $U_k$ ha dimensione 2 per ogni $k$, non esiste un isomorfismo che lo trasforma in $\mathbb{R}^3$.

**Esercizio 3.** Sia $F$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ associato alla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.

(i) Scrivere esplicitamente l'espressione di $F$.

(ii) Determinare $\operatorname{Ker} F$ e $\operatorname{Im} F$ e stabilire se $F$ è un automorfismo di $\mathbb{R}^4$.

(iii) Trovare gli autospazi di $F$ e decidere se $F$ è diagonalizzabile.

(iv) Stabilire se $\mathbb{R}^4 = \operatorname{Ker} F \oplus \operatorname{Im} F$.

**Svolgimento.** Si ha che $F(x,y,z,t) = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z+t \\ 0 \\ -x-y-z-t \\ x+y+z+t \end{pmatrix}$. La matrice ha rango 1. L'immagine ha dimensione 1 ed è generata da una delle colonne: $(1,0,-1,1)$. Il nucleo ha dimensione 3 e lo si può calcolare risolvendo il sistema lineare $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Più semplicemente, sapendo che esso ha dimensione 3, conviene cercare tre vettori indipendenti che gli appartengono. Ad esempio dalla matrice si evince che $F(e_1) = F(e_2) = F(e_3) = F(e_4)$. Da cui si ha $F(e_1) - F(e_2) = \mathbf{0}$, $F(e_1 - e_2) = \mathbf{0}$ e infine $(1,-1,0,0) \in \operatorname{Ker} F$. Similmente si trova che $(1,0,-1,0) \in \operatorname{Ker} F$ e $(1,0,0,-1) \in \operatorname{Ker} F$. Per il calcolo degli autospazi, osserviamo subito che uno è già dato: $E(0) = \operatorname{Ker} F$ ed ha dimensione 3. Poiché il polinomio caratteristico ha grado 4, ci sarà necessariamente un altro autovalore (non nullo) semplice. Pertanto l'applicazione è diagonalizzabile. Si può procedere in maniera solita calcolando il polinomio caratteristico (che conterrà il fattore $\lambda^3$) e trovando l'autospazio mancante. Si ha che $p(\lambda) = -\lambda^3(\lambda - 1)$. La matrice caratteristica associata all'autovalore $\lambda = 1$ è $A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

L'autospazio cercato è allora dato dal sistema omogeneo: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \mathbf{0}$.

Si ottiene $E(1) = \mathcal{L}((1,0,-1,1))$. In alternativa, si proceda come segue. Consideriamo il vettore $F(e_1) - F(e_3) + F(e_4)$. Esso è dato dalla prima meno la terza più la quarta colonna della matrice $A$ e vale $F(e_1) - F(e_3) + F(e_4) = (1,0,-1,1)$. A ben vedere abbiamo ottenuto che $F(e_1 - e_3 + e_4) = F(1,0,-1,1) = (1,0,-1,1)$. Quindi il vettore $v = (1,0,-1,1)$ è autovettore associato all'autovalore $\lambda = 1$. È bene anche osservare che $E(1) = \operatorname{Im} F$. Siccome gli autospazi di un endomorfismo sono a somma diretta, ne consegue che immagine e nucleo di $F$ sono sottospazi complementari.

**Esercizio 4.** (i) Trovare, se esiste, un piano parallelo al piano $\pi : \; y + x - 2 = 0$ e contenente la retta $r : \begin{cases} y + 2x = 0 \\ 2x - z + 1 = 0. \end{cases}$

(ii) Trovare, se esiste, un piano passante per $P(-1,0,1)$ e parallelo alle rette

$s_1 : \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ e $s_2 : \begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = 0. \end{cases}$

(iii) Trovare nello spazio due rette sghembe $r_1$ e $r_2$ tali che $d(r_1, r_2) = 1$ e tali che la perpendicolare comune ad $r_1$ e $r_2$ sia la retta $s : \begin{cases} z = 0 \\ y = 2. \end{cases}$ (*Suggerimento: un grafico può aiutare.*)

**Svolgimento.** (i). Un piano siffatto deve essere parallelo sia lla retta $r$ che al piano $\pi$. Ne segue che $r$ e $\pi$ devono essere paralleli a loro volta. Ma così non è giacché $v_r \cdot v_\pi = (1,-2,2) \cdot (1,1,0) \neq 0$.
(ii) Si trovano facilmente i vettori direzionali $v_{s_1} = (2,-1,1)$ e $v_{s_2} = (-1,1,1)$. Il piano cercato ha equazione cartesiana data da $\begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x + 3y - z + 3 = 0$.

(iii) Aiutandosi con un grafico elementare si trovano ad esempio la retta $r_1 : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$

(l'asse $y$) e la retta $r_2 : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2. \\ z = s \end{cases}$

**Esercizio 5.** Sia data la curva algebrica piana irriducibile:

$$\mathscr{C} : \; x^2 + y^2 = x(x^2 - y^2).$$

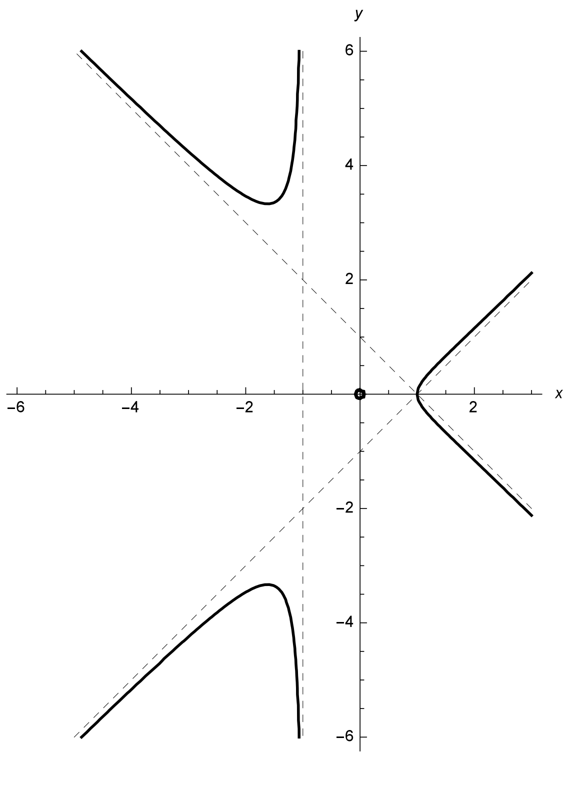
(i) Determinare la retta tangente a $\mathscr{C}$ nei suoi punti di ascissa $x = -2$.

(ii) Che tipo di punto è l'origine per $\mathscr{C}$?

(iii) Trovare gli asintoti di $\mathscr{C}$.

(iv) Tracciare il grafico di $\mathscr{C}$.

**Svolgimento.** (i) La chiusura proiettiva è la curva $\overline{\mathscr{C}}: X_1(X_1^2 - X_2^2) - X_0X_1^2 - X_0X_2^2 = 0$. Il gradiente omogeneo è $\nabla = (3X_1^2 - 2X_0X_1 - X_2^2, -2X_0X_2 - 2X_1X_2, -X_1^2 - X_2^2)$. I punti di ascissa -2 sono ottenuti da $4 + y^2 + 2(4 - y^2) = 0$ e sono $(-2, \pm 2\sqrt{3})$. I corrispondenti proiettivi sono $[-2, \pm 2\sqrt{3}, 1]$. Il gradiente in $P[-2, 2\sqrt{3}, 1]$ vale $\nabla(P) = (4, 4\sqrt{3}, -16)$. La tangente proiettiva in tale punto è allora $\overline{r}: X_1 + \sqrt{3}X_2 - 4X_0 = 0$ che dà la retta affine $r: x + \sqrt{3}y - 4 = 0$. Essendo la curva simmetrica rispetto all'asse $x$, la tangente in $P'(-2, -2\sqrt{3})$ è data con lo scambio $y \to -y$. Si ottiene così la retta $r': x - \sqrt{3}y - 4 = 0$.
(ii) La curva contiene termini di secondo e di terzo grado. L'origine appartiene alla curva ed è allora un punto doppio. Il termine omogeneo di grado 2 è $-x^2 - y^2 = 0$ che produce rette immaginarie. Allora l'origine è un punto isolato per $\mathscr{C}$.
(iii) Ponendo $X_0 = 0$ nell'equazione della chiusura proiettiva, si ottiene $X_1(X_1^2 - X_2^2) = 0$ che dà i tre punti impropri di $\mathscr{C}$: $Y_\infty[0, 1, 0]$, $P_1[1, 1, 0]$ e $P_2[1, -1, 0]$. Le rispettive tangenti sono $X_1 + X_0 = 0$, $X_1 - X_2 - X_0 = 0$ e $X_1 + X_2 - X_0 = 0$ che danno gli asintoti di $\mathscr{C}$: $x = -1$, $y = x - 1$ e $y = -x + 1$.
(iv) La curva passa per il punto $(1, 0)$ che è il solo in comune con gli asintoti obliqui. $\mathscr{C}$ non interseca l'altro asintoto. Studiamo ora il comportamento della curva vicino ai tre asintoti. L'intersezione di $\mathscr{C}$ con $X_1 = -X_0$, dà $-2X_1X_2^2 = 0$. L'esponente di $X_1$ è dispari, allora la curva è dallo stesso lato dell'asintoto. Similmente, poiché la curva è di terzo grado ed incontra gli asintoti obliqui in un solo punto (quello al finito $(1, 0)$), nel punto all'infinito si concentrano due intersezioni. Allora la molteplicità di intersezione nei punti all'infinito è pari e la curva si spezza rispetto a tali asintoti. Si evince allora che il grafico della curva è il seguente:



## Febbraio 2015 - Prova 3

**Esercizio 1.** I) Sono dati nello spazio i punti

$$A(1,1,0), \qquad B(3,2,-1), \qquad C(1,3,0), \qquad D(-1,2,1).$$

$\boxed{\mathbf{V}}$ Il quadrilatero $ABCD$ è un parallelogramma.

$\boxed{\mathbf{F}}$ L'area del quadrilatero $ABCD$ vale 4.

$\boxed{\mathbf{V}}$ I punti $A, B, C, D$ sono complanari.

**Svolgimento.** Si ha che $\overrightarrow{AB}(2,1,-1)$, $\overrightarrow{BC}(-2,1,1)$, $\overrightarrow{CD}(-2,-1,1)$, $\overrightarrow{DA}(2,-1,-1)$. Quindi il quadrilatero è un parallelogramma (che è una figura piana). Il prodotto vettoriale $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ i & j & k \end{vmatrix} = (-2,0,4)$. L'area del parallelogramma vale $\mathcal{A} = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{20}$.

II) Siano $A$ e $B$ due matrici antisimmetriche di ordine 3 e sia $0_3$ la matrice nulla $3 \times 3$.

$\boxed{\mathbf{F}}$ La matrice costituita ordinatamente dai complementi algebrici degli elementi di $A$ è anch'essa antisimmetrica.

$\boxed{\mathbf{V}}$ La matrice $3A - 100B^T + 0_3$ è antisimmetrica.

$\boxed{\mathbf{F}}$ La matrice $-A$ è simmetrica.

$\boxed{\mathbf{V}}$ La matrice $A^3$ è antisimmetrica.

**Svolgimento.** La trasposizione e le operazioni lineari su matrici antisimmetriche producono matrici antisimmetriche. Preso $n \in \mathbb{N}$, se $A$ è antisimmetrica, abbiamo che $(A^n)^T = (A^T)^n = (-A)^n = (-1)^n A^n$. Ora, se $n$ è pari, $A^n$ è simmetrica, se $n$ è dispari, $A^n$ è antisimmetrica. Come controesempio per la prima si usi la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la cui matrice dei complementi algebrici è $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ che è simmetrica e non antisimmetrica.

III) Il sistema lineare $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y - z = -1 \\ x + 2y = 3 \\ 3x - 2y + z = 3 \end{cases}$

$\boxed{\mathbf{F}}$ è indeterminato.

$\boxed{\mathbf{F}}$ ammette tre soluzioni.

$\boxed{\mathbf{V}}$ definisce un punto nello spazio affine.

$\boxed{\mathbf{V}}$ ammette la soluzione $(1,1,2)$.

**Svolgimento.** Il sistema ammette la soluzione $(1,1,2)$ che rappresenta un punto nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$.

IV) Sono dati in $\mathbb{R}^3$ tre vettori linearmente indipendenti $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ ed un quarto vettore $\mathbf{a}$.

$\boxed{\mathbf{V}}$ L'insieme $\{\mathbf{u}-\mathbf{v},\ \mathbf{w}+\mathbf{v}+\mathbf{u},\ \mathbf{u}+3\mathbf{w}\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\mathbf{F}}$ L'insieme $\{\mathbf{u}-\mathbf{v},\ \mathbf{w}-\mathbf{v},\ \mathbf{u}-\mathbf{w}\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\mathbf{F}}$ L'insieme $\{\mathbf{w}\wedge\mathbf{v},\ \mathbf{w},\ \mathbf{u},\ \mathbf{a}\wedge\mathbf{u}\}$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\mathbf{V}}$ L'insieme $\{\mathbf{u}\wedge\mathbf{v},\ \mathbf{w}\wedge\mathbf{v},\ \mathbf{u}\wedge\mathbf{w}\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

**Svolgimento.** Utilizzando la base $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ e scrivendo le componenti nelle righe di una matrice, nel primo caso si ottiene $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ che ha determinante non nullo. La prima allora è vera. Similmente, si ottiene che la seconda è falsa. La terza è falsa. Per vederlo, si prenda $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ e $\mathbf{u}$ perpendicolare a $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Allora l'insieme considerato contiene due volte il vettore nullo e non può generare $\mathbb{R}^3$. La quarta è vera e richiede attenzione per essere dimostrata. Supponiamo per assurdo che siano lin. dip., allora uno di essi è combinazione lineare dei rimanenti. Non è restrittivo supporre che sia il primo dipendente dagli altri. Allora $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}=\lambda\,\mathbf{w}\wedge\mathbf{v}+\mu\,\mathbf{u}\wedge\mathbf{w}$, per qualche $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. I vettori $\mathbf{w}\wedge\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}\wedge\mathbf{w}$ sono ortogonali a $\mathbf{w}$ per le proprietà del prodotto vettoriale, lo stesso vale per $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$ perché loro combinazione lineare. Inoltre $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$ è ortogonale sia a $\mathbf{u}$ che a $\mathbf{v}$. Allora $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$ è complessivamente ortogonale ai vettori di una base di $\mathbb{R}^3$ ed è il vettore nullo. Ma questo è assurdo.

V) Siano dati in $\mathbb{R}^4$ i due sottospazi

$$U=\mathcal{L}((1,1,0,0),\ (1,2,-1,0),\ (1,1,0,-1))$$

$$W=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4\,|\,x_3=x_4,\ x_1-x_2+x_3=0\}.$$

$\boxed{\mathbf{V}}$ Il sottospazio $U\cap W$ ha codimensione uguale a 3.

$\boxed{\mathbf{F}}$ Risulta che $\mathbb{R}^4=U\oplus W$.

$\boxed{\mathbf{F}}$ Si ottiene che $U^\perp+W^\perp=\mathbb{R}^4$.

$\boxed{\mathbf{F}}$ Il sottospazio $U^\perp+W$ ha equazioni parametriche date da $\begin{cases}x_1=t-s\\ x_2=t\\ x_3=s\\ x_4=s+t\end{cases}$

$\boxed{\mathbf{F}}$ È possibile costruire un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ che ha $U$ come nucleo e $W$ come immagine.

**Svolgimento.** Lo spazio $U$ ha dimensione 3, $W$ invece 2 (è generato dai vettori $(1,0,-1,-1)$ e $(0,1,1,1)$). Ne segue che $U^\perp$ e $W^\perp$ hanno dimensione 1 e 2 rispettivamente. La seconda, la terza e la quinta (per il teorema del rango) sono allora false. Si ha che $U^\perp$ è lo spazio generato da $(1,-1,-1,0)$. Lo spazio $U^\perp + W$ ha dimensione 3 quindi non può dipendere da due parametri: la quarta è falsa. Lo spazio $U+W$ ha dimensione 4, per Grassmann allora la prima è vera.

**Esercizio 2.** Sia $k \in \mathbb{R}$ e si considerino i seguenti polinomi di $\mathbb{R}_{\leqslant 3}[x]$:

$$p_1 = 1 + kx^3 \qquad p_2 = 2 + x + kx^2 + 2x^3 \qquad p_3 = 3 + x + 2x^3 \qquad p_4 = 1 + kx^2 + k^2x^3$$

(i) (**2pt**) Posto $U = \mathcal{L}(p_1, p_2, p_3, p_4)$, calcolare la dimensione di $U$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(ii) (**1pt**) Per quali valori di $k$ esiste un sottospazio $W \neq \{0\}$ tale che

$$U \oplus W = \mathbb{R}_{\leqslant 3}[x]?$$

Determinare esplicitamente una base di $W$.

(iii) (**2pt**) Dati i polinomi

$$q_1 = 1 + kx \qquad \text{e} \qquad q_2 = k + kx^3,$$

sia $V = \mathcal{L}(q_1, q_2)$, lo spazio da essi generato. Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ si ha

$$\dim(U \cap V) = 2.$$

(iv) (**1pt**) Per quali valori di $k$ è possibile costruire un isomorfismo tra U e lo spazio

$$T = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 0\}?$$

**Svolgimento.** (i) Come è ben noto, $\mathbb{R}_{\leqslant 3}[x]$ è isomorfo a $\mathbb{R}^4$. Allora possiamo identificare i polinomi di grado al più tre con quaterne di numeri reali. Più precisamente: $p_1(1,0,0,k)$, $p_2(2,1,k,2)$, $p_3(3,1,0,2)$ e $p_4(1,0,k,k^2)$. Per studiare la dimensione dello spazio $U$ che generano, studiamo al variare di $k$ il rango della matrice che essi formano messi in riga. Si ottiene la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & k \\ 2 & 1 & k & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & k & k^2 \end{pmatrix}$. Il determinante della matrice $A$ vale $k^2(2-k)$. Per $k \neq 0, 2$ si ha che $\dim U = 4$ e quindi $U = \mathbb{R}_{\leqslant 3}[x]$. Per $k = 0$, invece $\dim U = 2$ e infine, per $k = 2$, si ottiene $\dim U = 3$.

(ii) Per $k \neq 0, 2$ la risposta è negativa poiché il complementare di $U$ è proprio il sottospazio banale. Per $k = 0$ un complementare di $U$ deve avere dimensione 2. Completando la base di $U$ usando i polinomi della base canonica troviamo $W_{k=0} = \mathcal{L}(x,\ x^2)$. Similmente, per $k = 2$ si ottiene $W_{k=2} = \mathcal{L}(x^3)$. Per comodità, anche qui si può procedere con la notazione di quaterne di numeri reali. Si badi poi a riscrivere il risultato sotto forma di polinomi!

(iii) Osserviamo che $\dim V = 2$ per $k \neq 0$, invece $\dim V = 1$ per $k = 0$. Siccome per $k \neq 0, 2$, $U = \mathbb{R}_{\leqslant 3}[x]$, banalmente abbiamo che $\dim(U \cap V) = 2$. Per $k = 0$, poiché $\dim V = 1$, la sua intersezione con $U$ non può avere dimensione 2. Per $k = 2$, siccome $V \not\subset U$ (basta far vedere che il secondo generatore di $V$ è indipendente dai tre generatori di $U$), l'intersezione non può essere $V$ e quindi non può avere dimensione 2.

(iv) Lo spazio $T$ ha dimensione 2 poiché sottospazio di $\mathbb{R}^3$ definito da una sola equazione. Allora l'unico valore accettabile di $k$ è $k = 0$ perché in tal caso $U$ ha dimensione 2 e ciò basta a dire che è isomorfo a $T$.

**Esercizio 3.** Sia $k \in \mathbb{R}$. Si consideri l'endomorfismo $F$ di $\mathbb{R}^4$ tale che

$$F(x, y, z, t) = (x, \quad -x + kz, \quad x + y, \quad x + y - kz + t)$$

(i) (**1pt**) Determinare la matrice associata ad $F$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(ii) (**1pt**) Per quali valori di $k$ l'endomorfismo $F$ è iniettivo?

(iii) (**1pt**) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare la dimensione di $\operatorname{Im} F$.

(iv) (**2pt**) Per quali valori di $k$ l'endomorfismo $F$ è diagonalizzabile?

(v) (**1pt**) Per $k = 1$, trovare una base di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori per $F$.

**Svolgimento.** (i) La matrice associata rispetto alle basi canoniche è $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & k & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -k & 1 \end{pmatrix}$.

(ii) Il determinante di $A$ vale $\det A = -k$. Allora $F$ è iniettivo se e solo se $k \neq 0$.

(iii) La dimensione dell'immagine di $F$ eguaglia il rango di $A$. Esso vale 4 per $k \neq 0$ e 3 per $k = 0$. In particolare $\operatorname{Im} F = \mathbb{R}^4$ per $k \neq 0$.

(iv) La matrice caratteristica è $A - \lambda I_4 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & k & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -k & 1-\lambda \end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico di $F$ è $p(\lambda) = (1-\lambda)^2(\lambda^2 - k)$. A seconda dei valori di $k$ si ottengono autovalori con molteplicità algebriche diverse. Cominciamo col dire che per $k < 0$ $F$ non è diagonalizzabile poiché non ha autovalori tutti reali. Riassumiamo gli altri casi con la seguente tabella:

| valori di $k$ | autovalori | molteplicità algebrica |
|---|---|---|
| $k = 0$ | $\lambda = 0$<br>$\lambda = 1$ | $m.a.(0) = 2$<br>$m.a.(1) = 2$ |
| $k = 1$ | $\lambda = 1$<br>$\lambda = -1$ | $m.a.(1) = 3$<br>$m.a.(-1) = 1$ |
| $k \neq 0, 1$ | $\lambda = 1$<br>$\lambda = \sqrt{k}$<br>$\lambda = -\sqrt{k}$ | $m.a.(1) = 2$<br>$m.a.(\sqrt{k}) = 1$<br>$m.a.(-\sqrt{k}) = 1$ |

Studiamo ora le molteplicità geometriche nei vari casi. Per $k = 0$ e $\lambda = 0$ la matrice caratteristica ha rango 3, quindi $m.g.(0) = 4 - 3 = 1 \neq m.a.(0) = 2$. Pertanto $F$ non è diagonalizzabile.

Per $k = 1$ ci aspettiamo che sia diagonalizzabile per via del punto (v). Di sicuro $m.g.(-1) = 1$. Inoltre per $k = \lambda = 1$ la matrice caratteristica ha rango 1 e quindi $m.g.(1) = 3 = m.a.(1)$. Quindi $F$ è diagonalizzabile.

Per $k \neq 0,1$, si deve solo calcolare $m.g.(1)$, gli altri autovalori sono semplici. Per $\lambda = 1$ la matrice caratteristica diventa $A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & k & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -k & 0 \end{pmatrix}$. Essa ha rango 2 per i valori di $k$ che stiamo considerando. Allora $m.g.(1) = 2$ ed $F$ è diagonalizzabile. Quindi $F$ è diagonalizzabile per ogni $k > 0$.

(v) Per $k = 1$ e $\lambda = 1$ la matrice caratteristica diventa: $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. L'autospazio $E(1)$ è dato dalle soluzioni del sistema $A'\mathbf{X} = \mathbf{0}$. Si ottiene l'equazione $x + y - z = 0$. Sicché $E(1) = \mathcal{L}((1,0,1,0),\ (0,1,1,0),\ (0,0,0,1))$. Per $k = 1$ e $\lambda = -1$ la matrice caratteristica diventa: $A'' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. L'autospazio $E(-1)$ è dato dalle soluzioni del sistema $A''\mathbf{X} = \mathbf{0}$. Si ottiene $\begin{cases} 2x = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y - z + 2t = 0 \end{cases}$ da cui $E(-1) = \mathcal{L}((0,-1,1,1))$. La base di autovettori cercata è $\mathcal{B} = \{\ (1,0,1,0),\ (0,1,1,0),\ (0,0,0,1),\ (0,-1,1,1)\ \}$.

**Esercizio 4.** Nello spazio euclideo sono dati la retta $r : \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ la retta

$$s : \begin{cases} x + 2y - z - 2 = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \quad \text{ed il piano } \pi : \begin{cases} x = t - t' \\ y = 1 + 2t + t'. \\ z = t' \end{cases}$$

(i) Trovare, se esiste, un punto $P \in s$ che disti $\frac{1}{\sqrt{14}}$ dal piano $\pi$.

(ii) Trovare, se esiste, un punto $Q \in r$ che disti 3 dal piano $\pi$.

(iii) Determinare, se esiste, un piano che contiene le rette $r$ ed $s$.

(iv) Determinare un piano passante per l'origine e parallelo ad $r$ ed $s$.

(v) Costruire, se esiste, un piano contenente $r$ e parallelo ad $s$.

**Svolgimento.** (i) Il piano $\pi$ ha equazione cartesiana $\pi : 2x - y + 3z + 1 = 0$. La retta $s$ ha equazioni parametriche date da $s : \begin{cases} x = t + \frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = t \end{cases}$ Cerchiamo allora un punto $P(t + \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, t) \in s$ tale che $\dfrac{|2(t + \frac{2}{3}) - \frac{2}{3} + 3t + 1|}{\sqrt{14}} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}$. Si ottiene $|5t + \frac{5}{3}| = 1$, cioè $t = -\frac{2}{15}$ o $t = -\frac{8}{15}$. Con la prima scelta si ottiene il punto $P(\frac{8}{15}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{15})$.

(ii) Le equazioni parametriche della retta $r$ sono ad esempio $r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$. Si osserva che $r$ e $\pi$ sono paralleli. Infatti $v_r \cdot v_\pi = -2 - 1 + 3 = 0$. Quindi tutti i punti di

$r$ hanno la stessa distanza da $\pi$. Preso ad esempio il punto $Q_1 = (1, 0, 0)$, si trova che questo ha distanza $\frac{3}{\sqrt{14}}$ da $\pi$. Quindi la seconda richiesta non è soddisfatta dai punti di $r$. In alternativa, si può procedere come per $s$. Si trova $\dfrac{|2(1-t) - t + 3t + 1|}{\sqrt{14}}$. Da questa si ricava la condizione impossibile $\frac{3}{\sqrt{14}} = 3$.

(iii) Tale piano esiste se e solo se le rette sono complanari. Si trova che $v_r(-1, 1, 1)$ e $v_s = (1, 0, 1)$. Le rette non sono parallele (ce lo aspettavamo data la posizione che esse hanno rispetto al piano $\pi$). Proviamo a cercare una eventuale intersezione. Eguagliando le equazioni parametriche si ha $\begin{cases} 1 - t = t' + \frac{2}{3} \\ t = \frac{2}{3} \\ t = t' \end{cases}$ Si ottiene $t = t' = \frac{2}{3}$ e dalla prima equazione la condizione impossibile $\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$. Pertanto le rette non sono complanari.

(iv) Cerchiamo il piano passante per l'origine generato dai vettori $v_r$ e $v_s$. Questo ha equazione determinantale data da $\pi_1 : \begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Così si trova il piano cercato $\pi_1 : \; x + 2y - z = 0$.

(v) Come nel punto precedente cerchiamo il piano passante per un punto di $r$, ad esempio $Q_2(1, 0, 0)$ e generato dai vettori $v_r$ e $v_s$. Questo ha equazione determinantale data da $\pi_2 : \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Così si trova il piano cercato $\pi_2 : \; x + 2y - z - 1 = 0$. In alternativa si può traslare il piano trovato prima portandolo nel punto $Q_2$.

**Esercizio 5.** Sia data la conica:

$$\mathscr{C} : \; x^2 - 5y^2 + 6\sqrt{3}xy - 4 = 0.$$

(i) Classificare $\mathscr{C}$ e trovare una sua forma canonica $\mathscr{C}_0$.

(ii) Trovare un'isometria $f$ che trasforma $\mathscr{C}$ in $\mathscr{C}_0$ e dire di che tipo di isometria si tratta.

(iii) Spiegare perché non esiste un'isometria che trasforma $\mathscr{C}$ nella conica $\mathscr{S} : \; x^2 = 1$.

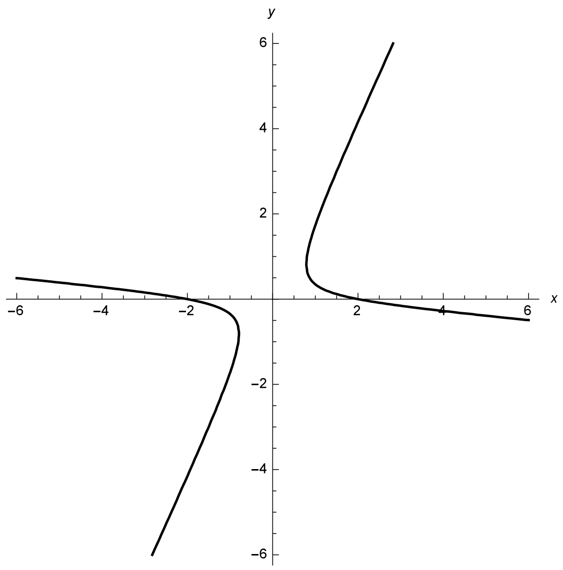
(iv) Trovare i punti singolari della curva $\mathscr{C} \cup \mathscr{S}$.

(v) Tracciare il grafico di $\mathscr{C}$.

**Svolgimento.** (i)-(ii) La matrice associata alla conica è $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3\sqrt{3} \\ 0 & 3\sqrt{3} & -5 \end{pmatrix}$, la cui parte quadratica è $Q = \begin{pmatrix} 1 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -5 \end{pmatrix}$. Siccome $\det A \neq 0$ e $\det Q = -32 < 0$, la conica è un'iperbole non degenere. Partiamo dal diagonalizzare $Q$. Il suo polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 32$ e gli autovalori sono $\lambda = 4$ e $\lambda = -8$. Gli autospazi sono $E(4) = \mathcal{L}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $E(-8) = \mathcal{L}\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. La matrice di passaggio dalla base canonica alla base di autovettori è $M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$. I segni degli autovettori sono stati scelti in maniera tale che il determinante venga 1. Sicché il cambio di coordinate è dato da $\mathbf{X'} = M^T\mathbf{X}$ mentre il cambio di coordinate per trovare la conica trasformata è dato da $\mathbf{X} = M\mathbf{X'}$. Più precisamente abbiamo $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y' \\ y = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' \end{cases}$ e $\rho : \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \\ y' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y. \end{cases}$ Sostituendo nella conica le espressioni trovate per $x$ e $y$, dopo semplici passaggi, abbiamo $\mathscr{C}' : \; x'^2 - \dfrac{y'^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$, che è la forma canonica di $\mathscr{C}$ cercata. L'isometria usata è la rotazione $\rho$ di $30°$ in senso antiorario.

(iii) La conica $\mathscr{S}$ è una parabola degenere, quindi non può esistere una isometria che trasforma $\mathscr{C}$ in $\mathscr{S}$.

(iv) I punti singolari dell'unione di due curve sono dati dai punti singolari dell'una, i punti singolari della seconda e i punti di intersezione delle due curve. Siccome $\mathscr{C}$ ed $\mathscr{S}$ sono curve lisce, cerchiamo le intersezioni tra di esse. Si ottengono i punti $P_1(1, \sqrt{3}/5)$, $P_2(1, \sqrt{3})$, $P_3(-1, -\sqrt{3}/5)$, $P_4(-1, -\sqrt{3})$.




**Esercizio 6.** Studiare e disegnare la curva algebrica

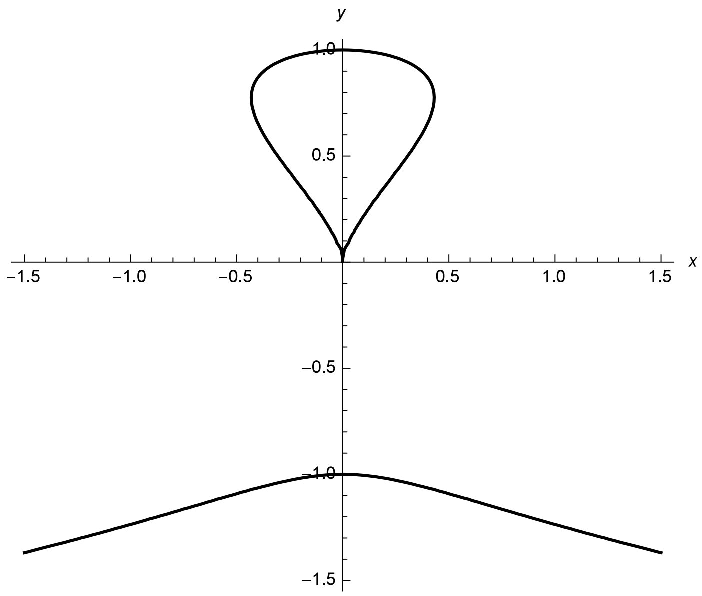
$$\mathscr{C} : \; x^2 = y^3 - y^5.$$

**Svolgimento.** La chiusura proiettiva della curva $\mathscr{C}$ è $\overline{\mathscr{C}} : \; X_1^2X_0^3 - X_2^3X_0^2 + X_2^5 = 0$. Il gradiente omogeneo è $\nabla = (2X_1X_0^3; \; -3X_2^2X_0^2 + 5X_2^4; \; 3X_1^2X_0^2 - 2X_0X_2^3)$. I punti singolari di $\overline{\mathscr{C}}$ sono dati dal sistema $\begin{cases} 2X_1X_0^3 = 0 \\ -3X_2^2X_0^2 + 5X_2^4 = 0. \\ 3X_1^2X_0^2 - 2X_0X_2^3 = 0 \end{cases}$ Dalla prima equazione abbiamo le possibilità $(*)\begin{cases} X_1 = 0 \\ -3X_2^2X_0^2 + 5X_2^4 = 0 \\ 3X_1^2X_0^2 - 2X_0X_2^3 = 0 \end{cases}$ e $(**)\begin{cases} X_0 = 0 \\ -3X_2^2X_0^2 + 5X_2^4 = 0. \\ 3X_1^2X_0^2 - 2X_0X_2^3 = 0 \end{cases}$

Il primo sistema diventa: $(*)\begin{cases} X_1 = 0 \\ -3X_2^2X_0^2 + 5X_2^4 = 0 \\ 2X_0X_2^3 = 0 \end{cases}$ che si scinde nei due sistemi

$$\begin{cases} X_1 = 0 \\ -3X_2^2X_0^2 + 5X_2^4 = 0, \\ X_0 = 0 \end{cases}$$ che produce la terna (0,0,0) che non rappresenta alcun punto proiettivo, e nel sistema $\begin{cases} X_1 = 0 \\ -3X_2^2X_0^2 + 5X_2^4 = 0, \\ X_2 = 0 \end{cases}$ che dà il punto proiettivo $[0,0,t] = [0,0,1]$, cioè l'origine del piano affine. L'altro sistema invece diventa $(**)\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_2 = 0 \end{cases}$, che rappresenta il punto proiettivo $X_\infty[1,0,0]$. Il complesso tangente nell'origine è dato annullando i termini di grado minimo in $\mathscr{C}$: $x^2 = 0$, l'asse $y$ contato due volte, pertanto l'origine è una cuspide con tangente l'asse $y$ contato due volte. Inoltre il punto all'infinito dell'asse $x$ è singolare. I punti impropri della curva sono dati da $\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1^2X_0^3 - X_2^3X_0^2 + X_2^5 = 0 \end{cases}$. Questo sistema dà il solo punto $X_\infty$, che come si è visto sopra, è singolare. Pertanto se la curva ammette asintoti, questi sono paralleli all'asse $x$. Possiamo allora andare a guardare per brevità direttamente il coefficiente del termine di grado massimo in $x$. Questo è $x^2$ ed il suo coefficiente vale 1, pertanto non può mai annullarsi e la curva non ha asintoti. In alternativa si cercano asintoti del tipo $y = q$. Sostituendo nell'equazione affine di $\mathscr{C}$, si ricava $x^2 - q^3 + q^5 = 0$. Dividendo tutto per $x^2$ e mandando $x \to \infty$ si ottiene: $1 - \frac{q^3}{x^2} + \frac{q^5}{x^2} = 0$, ovvero $1 = 0$ che è impossibile.

Poiché il polinomio che definisce $\mathscr{C}$ è pari in $x$, allora la curva $\mathscr{C}$ è simmetrica rispetto all'asse $y$. Per restringere le zone del piano in cui la curva giace, si osservi che $x^2 = y^3 - y^5 \geqslant 0$. Di qui $y^3(1 - y^2) \geqslant 0$, ovvero $y \leqslant -1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1$. La curva passa per i punti $(0,1)$ e $(0,-1)$. Questi punti non sono singolari e per motivi di simmetria della curva, sono punti a tangente necessariamente orizzontale. Ad ultimo si osservi che tutte le rette di tipo $y = k$, intersecano la curva in due punti simmetrici rispetto all'asse $y$ per tutti i valori di $k$ tali che $k \leqslant -1,\ 0 \leqslant k \leqslant 1$. Il grafico è a destra.



## Gennaio 2016 - Prova 3

**Esercizio 1.**

**A1)** Si consideri la quadrica $\mathcal{Q}:\ 2xy-2yz+2x+1=0$. Quale tra le seguenti è **falsa**?

(a) L'intersezione di $\mathcal{Q}$ col piano $z=0$ è un'iperbole.

(b) $\mathcal{Q}$ contiene la retta che passa per i punti $(-\frac{1}{2},0,0)$ e $(-\frac{1}{2},0,-1)$.

(c) $\mathcal{Q}$ è un ellissoide a punti reali.

(d) $\mathcal{Q}$ ha grafico illimitato.

**Svolgimento.** Piuttosto che classificare la quadrica e ridurla a forma canonica, è più conveniente procedere per esclusione con le opzioni date. Ponendo $z=0$ nell'equazione di $\mathcal{Q}$ si ottiene la conica $2xy+2x+1=0$ che rappresenta una iperbole, come si può facilmente vedere usando le matrici ad essa associata. Un ellissoide non può contenere sezioni piane iperboliche. Allora la (c) è falsa. La risposta esatta è la (c). Per completezza, proviamo che la (b) è vera. La retta che passa per quei due punti è la retta $\begin{cases} x=-1/2 \\ y=0. \\ z=t \end{cases}$ Sostituendo nell'equazione di $\mathcal{Q}$, si ottiene un'identità.

**A2)** È data la matrice $A=\begin{pmatrix} 0 & 100 & -17 \\ -100 & 0 & 31 \\ 17 & -31 & 0 \end{pmatrix}$. Allora

(a) $A^4$ è antisimmetrica.

(b) $A^6$ è invertibile.

(c) $A^8$ ammette l'autovalore nullo.

(d) $A^{10}$ è ortogonale.

**Svolgimento.** Ricordiamo che le potenze pari di una matrice antisimmetrica sono simmetriche, mentre le potenze dispari restano antisimmetriche. Una matrice antisimmetrica di ordine dispari ha determinante nullo, come tutte le sue potenze, per il teorema di Binet ed ammette quindi l'autovalore nullo. La risposta esatta è la (c). La (d) è falsa perché una matrice singolare non può essere ortogonale (dovrebbe avere determinante $\pm1$).

**B1)** Un endomorfismo diagonalizzabile $f$ di $\mathbb{R}^4$ ha l'autovalore 0 con molteplicità 2 e l'autovalore -2 che è semplice. Sia $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$ e sia $Id$ l'identità su $\mathbb{R}^4$.

$\boxed{\text{F}}$ Può accadere che $f(1,2,-1,0)=(-2,-4,2,0)$, $f(e_1-3e_2+e_4)=(0,0,0,0)$ e
$f(e_1+e_2-3e_3)=-2e_1-2e_2+6e_3$.

$\boxed{\text{F}}$ L'endomorfismo $f$ può ammettere come polinomio caratteristico il polinomio $p(\lambda)=\lambda^4-4\lambda^3+4\lambda^2$.

**V** L'applicazione $f$ può avere matrice associata $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ rispetto a una qualche base di $\mathbb{R}^4$.

**F** L'endomorfismo $f + 2Id$ di $\mathbb{R}^4$ è iniettivo.

**F** L'applicazione $f$ può avere come autospazi $U = \mathcal{L}((2,1,-1,-1),(1,1,0,0))$ e
$W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x + y - z + t = 0,\ 2x - 3z + t = 0\}$.

**Svolgimento.** Poiché l'applicazione $f$ è diagonalizzabile e conosciamo solo tre autovalori, ce n'è un altro diverso da 0 e da $-2$. L'applicazione ha allora tre autospazi, uno di dimensione 2 e due di dimensione 1. La prima è falsa, altrimenti ci sarebbero due autovettori indipendenti associati a $\lambda = -2$. Se $f$ avesse come polinomio caratteristico il polinomio $p(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 2)^2$, non avrebbe l'autovalore $-2$. La matrice data potrebbe essere associata ad $f$ poiché ha polinomio caratteristico $q(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)(\lambda + 2)$. Avrebbe quindi l'autovalore nullo contato due volte, l'autovalore semplice -2 e l'autovalore 1 semplice. Siccome le ipotesi sono rispettate, la matrice è accettabile. L'applicazione $f + 2Id$ ha come matrice associata, la matrice $M(f) + 2I_4$. Per definizione di autovalore, essendo -2 un autovalore di $f$ e quindi di ogni sua matrice associata, $M(f) + 2I_4$ è una matrice singolare. L'endomorfismo $f + 2Id$ non può essere allora iniettivo. Infine, i due spazi vettoriali $U$ e $W$ hanno entrambi dimensione 2 e non possono essere entrambi autospazi di $f$, perché $f$ ha solo un autospazio bidimensionale.

**B2)** Sono dati i sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \mathcal{L}((0,1,-1,-1),(1,1,0,0),(1,0,1,0))$$

$$W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x + y - z + t = 0, \quad x + y - z + kt = 0, \quad x - y = 0\}.$$

**V** Per $k = 0$ si ha che $\dim(U \cap W) = 2$.

**F** Per $k = 1$ risulta che $\dim(U + W)^{\perp} = 1$.

**V** Per $k = 2$ si trova che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$.

**V** Per $k \neq 1$ una base di $W$ è $\{(1,1,2,0)\}$.

**Svolgimento.** Osserviamo preliminarmente che $U$ ha dimensione 3 e che $W$ ha dimensione 1 per $k \neq 1$ e dimensione 2 per $k = 1$. Sicché per $k = 0$, lo spazio $U \cap W \subseteq W$ non può avere dimensione 2. Il vettore $(1,1,2,0)$ sta in $W$ (verifica le sue equazioni per ogni $k$) ed è indipendente dai generatori di $U$, pertanto lo spazio $U + W = \mathbb{R}^4$, per ogni $k$. Quindi il suo complemento ortogonale $(U + W)^{\perp}$ è banale e non può avere dimensione 1. Per $k = 2$, $W$ ha dimensione 1 e per quanto detto sopra $U$ e $W$ sono spazi a somma diretta e la loro somma è proprio $\mathbb{R}^4$. Anche l'ultima è vera per quanto detto sopra.

**B3)** Nel piano sono dati i punti $A(0,-3)$, $B(0,2)$ e $C(-2,2)$.

$\boxed{\textbf{F}}$ Il triangolo $ABC$ ha area 8.

$\boxed{\textbf{V}}$ Non esiste un'isometria del piano che trasforma $A, B, C$ ordinatamente nei punti $A'(2,1)$, $B'(1,1)$ e $C'(-3,1)$.

$\boxed{\textbf{V}}$ Esistono esattamente tre punti nel piano che completano il triangolo $ABC$ ad un parallelogramma.

**Svolgimento.** Disegnando i tre punti nel piano cartesiano, si osserva immediatamente che il triangolo è rettangolo e si calcola facilmente che ha area 5. La seconda è vera perché i tre punti $A', B', C'$ sono allineati e le isometrie invece conservano la *forma* delle figure. Infine, la terza è vera. Basta mandare da ogni vertice del triangolo una retta parallela al lato ad esso opposto. I punti di intersezione, presi uno per volta, completano il triangolo ad un parallelogramma.

**Esercizio 2.** Si consideri la forma quadratica su $\mathbb{R}^4$ definita da

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2k\, x_1 x_4 + 2x_2 x_3,$$

con $k$ parametro reale.

(i) Determinare la matrice associata a $Q$ rispetto alla base canonica.

(ii) Determinare rango e segnatura di $Q$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(iii) Diagonalizzare $Q$ al variare di $k \in \mathbb{R}$ esplicitando la base diagonalizzante usata.

(iv) Al variare di $k$, determinare la dimensione del complemento ortogonale rispetto a $Q$ del sottospazio $U = \mathcal{L}((1,0,0,-1),(1,1,0,0),(1,-1,1,-1))$

**Svolgimento.** (i) La matrice associata a $Q$ è $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(ii) Il determinante di $Q$ vale $k^2$. Si trova che per $k = 0$ il rango di $Q$ è 2, mentre per $k \neq 0$, il rango vale 4. Per il calcolo della segnatura si può attendere la diagonalizzazione, o più semplicemente si può leggerla dal polinomio caratteristico usando la regola dei segni di Cartesio. Il polinomio caratteristico di $Q$ è $p(x) = x^4 - (k^2+1)x^2 + k^2$. Le sue radici sono $1, -1, k, -k$. Pertanto per $k \neq 0$ la segnatura è $\operatorname{sgn} Q = (2,2)$ e per $k = 0$ invece $\operatorname{sgn} Q = (1,1)$.

(iii) Procediamo utilizzando l'algoritmo induttivo dato nella dimostrazione del teorema di Gauss-Lagrange. Per comodità, preso $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, calcoliamo $Q \cdot v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ kx_1 \end{pmatrix}$. La forma $Q$ ha rango almeno 2 per ogni valore di $k$. Poiché tutti i vettori della base canonica sono isotropi ne cerchiamo uno non nullo leggendo dagli elementi della matrice. Poiché $b(e_2, e_3) = 1 \neq 0$, il vettore $v_1 = e_2 + e_3$ è non isotropo. Infatti $Q(e_2 + e_3) = Q(e_2) + Q(e_3) + 2b(e_2, e_3) = 0 + 0 + 2 \neq 0$. Calcoliamo $v_1^\perp$. Esso è definito dall'equazione lineare $(0,1,1,0) \begin{pmatrix} kx_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ kx_1 \end{pmatrix} = x_2 + x_3 = 0$. Allora

$v_1^\perp = \mathcal{L}((1,0,0,0),(0,1,-1,0),(0,0,0,1))$. Poiché $e_1$ ed $e_4$ sono isotropi, testiamo $v_2 = e_2 - e_3$. Si ha $Q(e_2 - e_3) = 0 + 0 - 2 \neq 0$. Quindi il vettore $v_2$ va messo da parte per costruire la base diagonalizzante che cerchiamo. Osserviamo che abbiamo ottenuto un vettore su cui $Q$ è positiva e uno su cui è negativa. Infatti per ogni $k$ la forma $Q$ ha almeno segnatura $(1,1)$. I vettori che cerchiamo ora sono isotropi per $k = 0$, non isotropi per $k \neq 0$. Portiamo avanti la ricerca in parallelo per quanto possibile. Il complemento ortogonale $(v_1, v_2)^\perp$ è definito dal sistema lineare $\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$. Si trova così $(v_1, v_2)^\perp = \mathcal{L}(e_1, e_4)$. Per quanto detto sopra $Q(e_1) = Q(e_4) = 0$. Per $k = 0$, per completare la base ortogonale scegliamo $e_1$ ed $e_4$. Infatti essi sono entrambi isotropi e ortogonali tra loro. Allora per $k = 0$ la base diagonalizzante è $\mathcal{B} = \{ v_1, v_2, e_1, e_4 \}$. Sia ora $k \neq 0$. Scegliamo nello spazio $(v_1, v_2)^\perp$ come terzo vettore della base diagonalizzante $v_3 = e_1 + e_4$. Si ha $Q(v_3) = 2k \neq 0$. Manca l'ultimo passo. Costruiamo ora $(v_1, v_2, v_3)^\perp$. Questo è definito dalle equazioni $\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0. \\ kx_4 + kx_1 = 0 \end{cases}$ Un generatore è $v_4 = (1,0,0,-1)$ (si ricordi che siamo nel caso $k \neq 0$). Verifichiamo che sia non isotropo: $Q(v_4) = -2k \neq 0$. La base diagonalizzante è allora $\mathcal{B} = \{ v_1, v_2, v_3, v_4 \}$. Si osservi che riassumendo quanto fatto, si riottengono i valori della segnatura di $Q$ che abbiamo trovato sopra usando il polinomio caratteristico. Si badi bene: si ottengono gli stessi segni, ma non esattamente gli autovalori della matrice di $Q$.

(iv) Il complemento ortogonale di $U$ è definito dalle equazioni lineari che si ottengono imponendo che il generico vettore $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ sia ortogonale ai generatori di $U$. Si ottiene il sistema lineare $\begin{cases} kx_4 - kx_1 = 0 \\ kx_4 + x_3 = 0 \\ kx_4 - x_3 + x_2 - kx_1 = 0 \end{cases}$ Tale sistema omogeneo ha come matrice incompleta associata la matrice $A = \begin{pmatrix} -k & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 & k \\ -k & 1 & -1 & k \end{pmatrix}$ Il rango vale 3 per $k \neq 0$ e 2 per $k = 0$. Pertanto $U^\perp$ ha dimensione 1 per $k \neq 0$ 2 per $k = 0$. Nel caso $k = 0$ l'intersezione tra $U$ e $U^\perp$ non è banale poiché $U$ contiene vettori isotropi.

**Esercizio 3.** Sono date la curva algebrica piana

$$\mathscr{C} : \; x^2(x + y + 1) - x^2 - y^2 = 0$$

e la conica

$$\mathscr{D} : \; 2x^2 + xy - 5x - 6y^2 + 11y - 3 = 0.$$

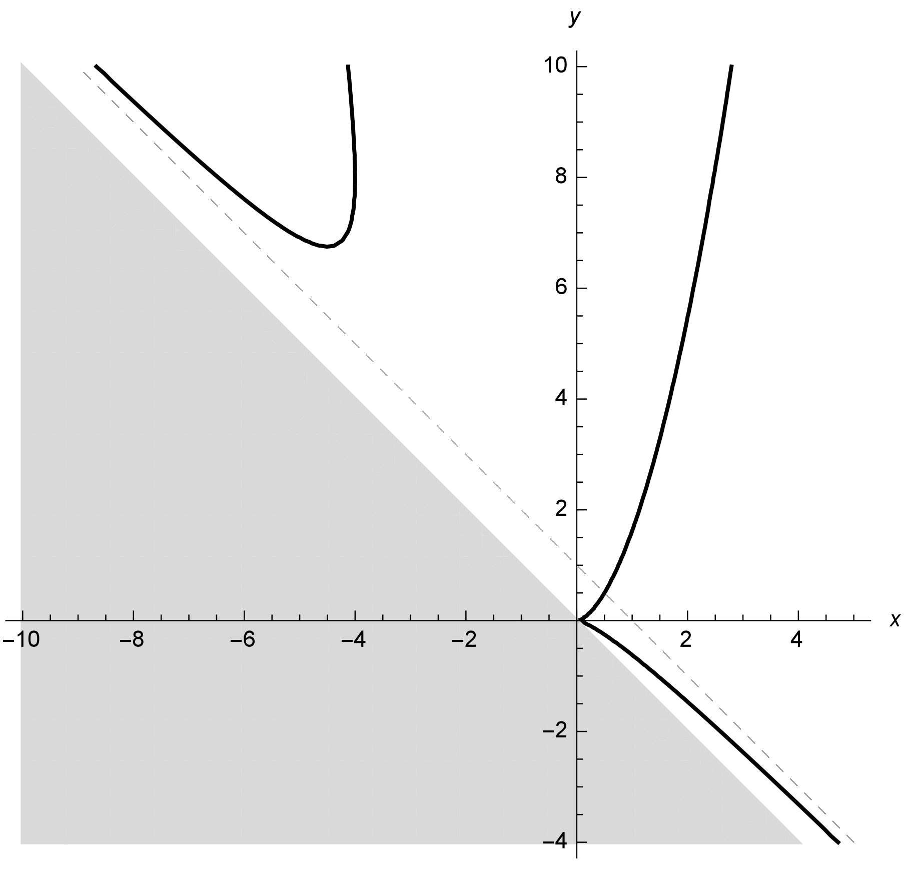
(i) Trovare i punti singolari e gli asintoti di $\mathscr{C}$.

(ii) Si tracci il grafico di $\mathscr{C}$.

(iii) Dopo aver dimostrato che $\mathscr{D}$ è unione di due rette, si trovino esplicitamente le rette che la costituiscono.

**Svolgimento.** (i) Più semplicemente l'equazione di $\mathscr{C}$ è $x^3 + x^2y - y^2 = 0$. La chiusura proiettiva di $\mathscr{C}$ è $\overline{\mathscr{C}} : \; X_1^3 + X_1^2X_2 - X_0X_2^2 = 0$. Il gradiente omogeneo è

$\nabla = (3X_1^2 + 2X_1X_2;\ X_1^2 - 2X_0X_2;\ -X_2^2)$. I punti singolari sono allora dati dal sistema $\begin{cases} 3X_1^2 + 2X_1X_2 = 0 \\ X_1^2 - 2X_0X_2 = 0 \\ -X_2^2 = 0 \end{cases}$ Dovendo essere $X_2 = 0$, il sistema si riduce a $\begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \end{cases}$ che dà il punto proiettivo $O[0,0,1]$, cioè l'origine del sistema affine di riferimento. Annullando i termini di secondo grado minimo si ottiene $y^2 = 0$, pertanto l'origine è una cuspide con tangente l'asse $x$ contato due volte. I punti impropri sono dati da $\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1^3 + X_1^2X_2 - X_0X_2^2 = 0 \end{cases}$ Si ottengono i punti $P[1,-1,0]$ e $Y_\infty[0,1,0]$. Essi sono entrambi regolari. Calcoliamo le loro tangenti. Si ha $\nabla(P) = (1,1,-1)$ che produce la retta tangente $X_1 + X_2 - X_0 = 0$, ovvero l'asintoto $x + y - 1 = 0$. Calcolando la molteplicità di intersezione tra l'asintoto e la curva si trova che la curva sta da parti opposte rispetto alla retta. Si ha poi $\nabla(Y_\infty) = (0,0,-1)$ che dà la retta tangente $X_0 = 0$ che non produce asintoti. Allora la curva si spinge verso il bordo del piano come la parabola $y = x^2$, senza avere cioè asintoti, e incontra l'asse $y$ nel suo punto all'infinito. Si è soliti dire che la curva ha un ramo di tipo parabolico.
(ii) La curva incontra gli assi solo nell'origine. I punti a tangente orizzontale sono dati dal sistema $\begin{cases} x^3 + x^2y - y^2 = 0 \\ 3x^2 + 2xy = 0 \end{cases}$ che restituisce il punto $Q(-\frac{9}{2}, \frac{27}{4})$ a tangente orizzontale. I punti a tangente verticale sono dati dal sistema $\begin{cases} x^3 + x^2y - y^2 = 0 \\ x^2 - 2y = 0 \end{cases}$ che ha per soluzione il punto $Q'(-4,8)$ a tangente verticale. Dall'equazione di $\mathscr{C}$ si ricava che $y^2 = x^2(x+y) \geqslant 0$. Ovvero $x + y \geqslant 0$ che significa che la curva giace nel semipiano sopra la bisettrice del secondo e quarto quadrante. Se ne deduce che l'asse $x$ è tangente alla curva nell'origine per i valori positivi della $x$.



**Esercizio 4.** (i) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare la distanza del piano $y + z = 0$ dalla retta $r : \begin{cases} x + ky = 1 \\ x - y + z = 0. \end{cases}$

(ii) Determinare, se esiste, un piano che contiene le rette $r : \begin{cases} x - y - 2z + 1 = 0 \\ 2x + y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = -10t \\ y = 2t - 1. \\ z = -6t - 3 \end{cases}$

(iii) Trovare una circonferenza dello spazio tangente l'asse $x$ nel punto $A(2, 0, 0)$ e passante per il punto $B(1, -1, 2)$.

**Svolgimento.** (i) Una retta ed un piano nello spazio possono essere incidenti o paralleli. Nel caso in cui sono incidenti o se la retta giace nel piano, la loro distanza vale 0. Quando invece sono propriamente paralleli la loro distanza può essere calcolata come la distanza di un punto qualsiasi della retta dal piano. Le intersezioni del piano e della retta sono dati dal sistema: $\begin{cases} y + z = 0 \\ x + ky = 1 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$ Per $k \neq -2$ il rango della matrice incompleta è 3, allora retta e piano si intersecano e la loro distanza vale 0. Per $k = -2$, il sistema diventa $\begin{cases} y + z = 0 \\ x - 2y = 1 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$. Esso è impossibile, allora retta e piano sono (propriamente) paralleli. per calcolare la loro distanza, prendiamo il punto $P(1, 0, -1) \in r$. La sua distanza dal piano vale $d(P, r) = \frac{|0-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
(ii) Si calcola facilmente un vettore direzionale di $s$ $v_s = (-10, 2, -6)$. Per calcolare un vettore direzionale di $r$ usiamo i minori di ordine 2 del sistema che definisce $r$. Si ha $v_r = \left( \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (5, -1, 3)$. Si capisce allora che le rette sono parallele e quindi complanari. Un punto di $r$ è $Q(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 0)$, uno di $s$ è $Q'(0, -1, -3)$. Il piano che contiene le due rette è dato dal piano passante per $Q'$ e generato dai vettori $v_r$ e $\overrightarrow{QQ'} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 3)$. Si ottiene il piano $\begin{vmatrix} x & y+1 & z+3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 3 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$ $x + 15(y+1) - \frac{1}{3}(x+3) - \frac{5}{3}(z+3) - (y+1) + 3x = 4xx + 14y - 2z + 8 = 0$, semplificando si ha $2x + 7y - z + 8 = 0$. Osserviamo che non avendo controllato che le rette fossero distinte, si correva il rischio di ottenere l'identità $0 = 0$; in tal caso i piani sarebbero stati infiniti e uno qualsiasi di essi avrebbe risposto alla nostra richiesta.
(iii) Una circonferenza è data come intersezione di un piano e di una sfera. Il problema ha più soluzioni, è più conveniente cercare la sfera di cui la circonferenza cercata è il suo equatore. Si avrà che centro della sfera e della circonferenza coincidono. Il piano su cui giace allora la circonferenza è $\pi_1$, che contiene l'asse $x$ e il punto $B$. Troviamolo. Il generico piano ha equazione $ax + by + cz + d = 0$. Poiché contiene l'asse $x$, deve avere giacitura perpendicolare a $v_x = (1, 0, 0)$. Allora è di tipo $by + cz + d = 0$. Imponendo il passaggio per $B$ si trova: $-b + 2c + d = 0$, dal passaggio per $A$ si ha poi $2a + d = 0$. Mettendo insieme le condizioni lineari trovate si ha $b = 2c, a = d = 0$, da cui $\pi_1 : 2y + z = 0$. Ora ci servono raggio e centro della sfera. Il centro lo costruiamo

come intersezione di tre piani. Uno di essi è $\pi_1$, poi cerchiamo $\pi_2$ che è perpendicolare all'asse $x$ e passa per il punto $A$, ad ultimo troveremo $\pi_3$ che è il piano perpendicolare al vettore $\overrightarrow{AB}$ passante per il punto medio $M(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$ del segmento $AB$. Il piano $\pi_2$, essendo perpendicolare all'asse $x$ ha giacitura $(1, 0, 0)$. È allora di tipo $x + d = 0$. Imponendo il passaggio per $A$ si ottiene $d = -2$ e quindi $\pi_2: \ x = 2$. Il generico piano perpendicolare ad $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -2)$ ha ad esempio giacitura $(1, 1, -2)$ ed è di tipo $x+y+2z+d = 0$. Imponendo il passaggio per $M$ si ottiene $\pi_3: \ x+y-2z+1 = 0$. Allora il centro della sfera (e della circonferenza) è dato dal sistema $\begin{cases} x = 2 \\ 2y + z = 0 \\ x + y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$, pertanto $C(2, -\frac{3}{5}, \frac{6}{5})$. Il raggio della sfera è dato dalla distanza di $C$ da $A$: $R = \frac{3}{\sqrt{5}}$. Allora la sfera cercata è $\Sigma : (x-2)^2 + (y + \frac{3}{5})^2 + (z - \frac{6}{5})^2 = \frac{9}{5}$ e la circonferenza è data da $\begin{cases} (x-2)^2 + (y + \frac{3}{5})^2 + (z - \frac{6}{5})^2 = \frac{9}{5} \\ 2y + z = 0 \end{cases}$

**Esercizio 5.** Si consideri l'endomorfismo $F : \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x] \longrightarrow \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$ definito come:

$$F(ax^2 + bx + c) = a(x^2 + 1) + b(x^2 + 1) + c(x^2 - x + 1).$$

(i) Calcolare la matrice associata ad $F$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$.

(ii) Calcolare l'immagine secondo $F$ del sottospazio $U = \{ax^2 + bx + c \,|\, a + b + c = 0\}$.

(iii) Trovare la controimmagine secondo $F$ del vettore $p(x) = (x + 1)^2$.

(iv) Trovare una base del nucleo e dell'immagine di $F$ e dire se sono a somma diretta.

(v) Dimostrare che l'insieme dei polinomi che vengono trasformati in sé stessi da $F$ costituiscono un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$ di dimensione 1.

(vi) Decidere se $F$ è diagonalizzabile.

**Svolgimento.** (i) Come di consueto, calcoliamo le immagini dei vettori della base canonica e scriviamo il risultato ancora in funzione della base canonica. Si ha: $F(x^2) = F(1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \cdot 1) = 1 \cdot (x^2 + 1) + 0 \cdot (x^2 + 1) + 0 \cdot (x^2 - x + 1) = x^2 + 1$; $F(x) = x^2 + 1$; $F(1) = x^2 - x + 1$. Da cui si deduce che la matrice canonica di $F$ è $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) Lo spazio $U$ ha per base $\{\, x^2 - 1, \ x - 1 \,\}$. Le immagini sono $F(x^2 - 1) = x$ e $F(x - 1) = x$. Allora $F(U) = \mathcal{L}(F(x^2 - 1), \ F(x - 1)) = \mathcal{L}(x)$.

(iii) La generica immagine ha la forma $F(ax^2+bx+c) = (a+b+c)x^2 - cx + (a+b+c)$. Per calcolare la controimmagine di $p(x) = x^2 - 2x + 1$, si deve risolvere il sistema lineare $\begin{cases} a + b + c = 1 \\ -c = -2 \end{cases}$

Si ricava $c = -2$, $b = 3 - a$ e $F^{-1}(p(x)) = \{\, ax^2 + (3 - a)x - 2 \,|\, a \in \mathbb{R} \,\}$, che è costituita da infiniti elementi.

(iv) La base dell'immagine la leggiamo dalle colonne di $A$. Si ha $\operatorname{Im} F = \mathcal{L}(x^2 + 1, \ x^2 - x + 1)$. Dal teorema del rango segue che il nucleo ha dimensione 1. Poiché $F(x^2) = F(x)$ se ne deduce $F(x^2 - x) = 0$. Pertanto $\operatorname{Ker} F = \mathcal{L}(x^2 - x)$.

(v) Si tratta di cercare l'autospazio associato all'autovalore 1. Risolviamo allora il sistema lineare $\begin{cases} a+b+c=a \\ -c=b \\ a+b+c=c \end{cases}$ da cui si trova $E(1) = \mathcal{L}(x^2 - x + 1)$.

(vi) Abbiamo trovato che il nucleo di $F$, ovvero l'autospazio associato a 0, ha dimensione 1. Inoltre l'autospazio $E(1)$ ha dimensione 1, per quanto detto al punto precedente. Per stabilire se $F$ è diagonalizzabile, cerchiamo un eventuale altro autovalore. Il polinomio caratteristico di $F$ è $p(x) = -x+2x^2-x^3 = -x(x-1)^2$. Qui si vede che l'autovalore 1 ha molteplicità algebrica 2 mentre s'è trovato che quella geometrica vale 2. L'endomorfismo $F$ non è pertanto diagonalizzabile.

**Esercizio Facoltativo.** Quali sono le isometrie piane che sono alla base dell'opera *Razze* di Escher?

**Svolgimento.** Per comodità supponiamo che la figura sia infinitamente estesa. Le isometrie che lasciano invariata la tassellatura sono infinite. Possiamo però raggrupparle per gli effetti geometrici che producono. Approssimando una qualsiasi delle figure triangolari (rossa, nera, grigia) con un triangolo equilatero si può facilmente osservare che le simmetrie assiali rispetto ai tre assi di simmetria del triangolo lasciano invariata la figura. Anche le rotazioni di 120° e di 240° lasciano invariata la figura. Si devono inoltre aggiungere le traslazioni di *tre motivi* lungo gli assi di simmetria del triangolo equilatero considerato. Infine vanno considerate tutte le composizioni dei tre tipi di isometrie che abbiamo trovato, come ad esempio le glissosimmetrie, composte da una simmetria e da una traslazione.

## Febbraio 2016 - Prova 1

**A1)** Si consideri la matrice $A$ quadrata di ordine 73 il cui elemento generico è $a_{ij} = i \cdot j$ Allora la matrice $A$

(a) è invertibile.

(b) ammette l'autovalore nullo.

(c) non è diagonalizzabile.

(d) ha determinante dispari.

**Svolgimento.** La prima riga $R_1(A)$ della matrice considerata è un vettore riga di lunghezza 73 i cui elementi sono ordinatamente gli elementi $a_{1j}$ di $A$. Più precisamente $R_1(A) = (1, 2, \ldots, 73)$. Similmente si trova che $R_2(A) = (2, 4, \ldots, 146) = 2R_1(A)$. Poiché $A$ ha due righe proporzionali ha determinante nullo e ammette pertanto l'autovalore nullo. La risposta esatta è la (b).

**A2)** Sia data la curva piana $\mathscr{C}: \; x^3 + x^2 + y^5 = 0$.

(a) La curva $\mathscr{C}$ è liscia.

(b) La curva $\mathscr{C}$ ammette asintoti.

(c) La tangente a $\mathscr{C}$ nel punto $P(-1, 0)$ interseca $\mathscr{C}$ con molteplicità di intersezione 5.

(d) La curva $\mathscr{C}$ non ammette punti impropri singolari.

**Svolgimento.** La chiusura proiettiva della curva è $\overline{\mathscr{C}}: \; X_1^3X_0^2 + X_1^2X_0^3 + X_2^5 = 0$. Il gradiente proiettivo è $\overline{\nabla} = (3X_1^2X_0^2 + 2X_1X_0^3, \; 5X_2^4, \; 2X_0X_1^3 + 3X_1^2X_0^2)$. Annullando questo si ottiene anzitutto $X_2 = 0$. Inoltre deve essere $\begin{cases} X_1X_0^2(3X_1 + 2X_0) = 0 \\ X_0X_1^2(2X_1 + 3X_0) = 0 \end{cases}$
Se $X_1 = 0$, otteniamo il punto $P[0, 0, 1]$: l'origine è un punto proprio singolare. Se $X_0 = 0$, troviamo il punto improprio singolare $X_\infty = [1, 0, 0]$. Infine, restano le possibilità $\begin{cases} 3X_1 + 2X_0 = 0 \\ 2X_1 + 3X_0 = 0 \end{cases}$ Tale sistema è omogeneo ed ha solo la soluzione banale. Si ottiene $X_0 = X_1 = X_2 = 0$, che non produce alcun punto proiettivo. L'unico punto improprio è $X_\infty$, se $\mathscr{C}$ ha allora un asintoto, questo deve essere verticale. Il termine di grado massimo in $x$ ha coefficiente costante, pertanto non ci sono asintoti. Resta allora la (c). Controlliamo che sia vera. Il gradiente affine è $\nabla = (3x^2 + 2x, 5y^4)$. Nel punto $P$ si ottiene $\nabla(-1, 0) = (1, 0)$. La retta tangente allora è $r: \; x = -1$. Per calcolare la molteplicità di intersezione tra retta tangente e curva in $P$ risolviamo il sistema $\begin{cases} x^3 + x^2 + y^5 = 0 \\ x = -1 \end{cases}$ Si ottiene $y^5 = 0$. Allora la soluzione $y = 0$ (che corrisponde a $P$) va contata 5 volte. La risposta esatta è la (c).

**B1)** Al variare del parametro reale $k$, sono dati in $\mathbb{R}^4$ il sottospazio $W$ definito dal sistema lineare $\begin{cases} x_1 + kx_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$ e il sottospazio $U = \{(1, 0, 1, 0), \; (k, k, 0, 0), \; (1, -1, 0, k)\}$

$\boxed{\mathbf{V}}$ Per $k = 1$ si ha che $U + W = \mathbb{R}^4$.

$\boxed{\mathbf{F}}$ Per $k \neq 0$ lo spazio $U^\perp$ non ammette base ortogonale.

$\boxed{\mathbf{V}}$ Per $k = 0$ risulta che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$.

$\boxed{\mathbf{V}}$ Per ogni $k \neq 0$ il sottospazio $U^\perp + W$ è isomorfo a $\mathbb{R}^3$.

**Svolgimento.** La dimensione di $W$ vale 2 per ogni valore di $k$ ed una sua base è data da $\{ (1,k,0,0),\ (1,1,0,1) \}$. Lo spazio $U$ ha dimensione 3 per $k \neq 0$ e dimensione 2 per $k = 0$, con base $\{ (1,0,1,0),\ (1,-1,0,0) \}$. Per $k = 1$ i vettori di $U$ e $W$ presi insieme generano $\mathbb{R}^4$. La seconda è falsa poiché $U$ non ha mai dimensione 4 e quindi il suo complemento ortogonale ha sempre una base (e quindi una ortogonale). La terza è vera: per $k = 0$ $U$ e $W$ sono a somma diretta poiché i loro generatori sono indipendenti e in tutto sono 4. Per $k \neq 0$, lo spazio $U^\perp$ è definito dalle equazioni lineari: $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 +_2 + kx_4 = 0 \end{cases}$ Se ne deduce che $U^\perp = \mathcal{L}(k,-k,-k,-2)$. Si trova allora che i generatori di $W$ e il generatore di $U^\perp$ sono indipendenti. Pertanto $U^\perp + W \simeq \mathbb{R}^3$.

**B2)** Sono dati nel piano i punti $P(1,1)$, $Q(-1,2)$ e la circonferenza $\mathscr{C}: \ x^2 + y^2 + 2x - y = -\frac{1}{4}$

$\boxed{\mathbf{F}}$ La distanza tra $P$ e $Q$ vale 2,3.

$\boxed{\mathbf{V}}$ L'area del triangolo che ha per vertici l'origine, $P$ e $Q$ vale $\frac{3}{2}$.

$\boxed{\mathbf{V}}$ L'area del cerchio sotteso da $\mathscr{C}$ vale $\pi$.

$\boxed{\mathbf{V}}$ Il punto $P$ non appartiene a $\mathscr{C}$.

**Svolgimento.** La distanza tra $P$ e $Q$ vale $\sqrt{5}$ che non è uguale al numero razionale 2,3. L'equazione pitagorica della circonferenza è $(x+1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 1$ che non contiene $P$ ed ha raggio 1. Allora l'area del cerchio sotteso vale $\pi$. L'area del triangolo $OPQ$ si trova facilmente partendo da un grafico, senza passare necessariamente per il prodotto vettoriale.

**B3)** Si consideri il sottospazio $W$ di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori di tipo $(1^m,\ 2^m,\ 3^m)$ al variare di $m \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\mathbf{V}}$ Lo spazio $W$ ha dimensione infinita.

$\boxed{\mathbf{V}}$ $W$ è isomorfo al sottospazio $\{(a+b)x^4 - bx^3 + (a-2c)x + a + 2b \,|\, a,b,c \in \mathbb{R}\}$ di $\mathbb{R}_{\leqslant 4}[x]$.

**Svolgimento.** Un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ non può mai avere dimensione infinita! Per Steinitz i sottospazi di $\mathbb{R}^3$ sono finitamente generati ed hanno al più dimensione 3. Lo spazio $W$ dipende da tre parametri, è facile convincersi che ha dimensione tre. Una base è ad esempio $\{ x^4 + x + 1,\ x^4 - x^3 + 2,\ -2x \}$.

**B4)** È data la base $\{u,\ v,\ w\}$ di $\mathbb{R}^3$. Allora

$\boxed{\mathbf{F}}$ $\{u+2w,\ (v\cdot u)v,\ w-u\}$ è necessariamente una base di $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\mathbf{V}}$ $\{3u,\ v-\dfrac{u\cdot v}{u\cdot u}u,\ u\wedge v\}$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$.

**Svolgimento.** Se i vettori $u$ e $v$ sono ortogonali, il vettore $(v\cdot u)v$ può essere nullo e non può far parte di una base. Il vettore $v-\dfrac{u\cdot v}{u\cdot u}u$ è ortogonale a $u$ per il teorema di Gram-Schmidt, è pertanto ortogonale anche a $3u$. Infine il prodotto vettoriale $u\wedge v$ è ortogonale ad $u$ e a $v$.

**Esercizio 1.** Si consideri la forma bilineare simmetrica $b$ su $\mathbb{R}^4$ associata alla matrice $A=\begin{pmatrix} k+1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica. Si consideri poi il sottospazio di $\mathbb{R}^4$

$$W=\mathcal{L}((1,1,0,0),\ (0,1,-1,0),(0,0,0,1)).$$

(i) Provare che $b$ non è prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$ per nessun valore di $k$.

(ii) Determinare rango e segnatura di $b$ al variare di $k$.

(iii) Al variare di $k$ si trovi una base diagonalizzante per $b$.

(iv) Per $k=0$ determinare un sottospazio massimale di $\mathbb{R}^4$ (rispetto all'inclusione) privo di vettori isotropi.

(v) Al variare di $k$, determinare una base del complemento ortogonale rispetto a $b$ di $W$.

(vi) Per quali valori di $k$ i sottospazi $W$ e $W^\perp$ sono a somma diretta?

**Svolgimento.** (i) Per provare che $b$ non è un prodotto scalare si osservi che $b(e_2,e_2)=-1<0$, quindi $b$ non può essere definita positiva.
(ii) Per $k\neq -2$ il rango di $b$ vale 4, per $k=-2$ invece vale 3. Per il calcolo della segnatura si può attendere la diagonalizzazione di $b$ oppure si può applicare la regola dei segni di Cartesio al polinomio caratteristico di $A$. Si calcola facilmente che $p(\lambda)=\det\begin{pmatrix} k+1-\lambda & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda\end{pmatrix}=(1-\lambda)^2[\lambda^2-k\lambda-(k+2)]$. Due autovalori sono positivi (quelli uguali ad 1). Per $k<-2$ i segni del polinomio $q(\lambda)=\lambda^2-k\lambda-(k+2)$ sono tutti positivi. Per la regola di Cartesio allora esso ammette radici negative e ne segue che $\operatorname{sgn}(b)=(2,2)$. Quando invece $-2<k<0$ la successione dei segni è $++-$, abbiamo allora una radice positiva e una negativa e $\operatorname{sgn}(b)=(3,1)$. Infine per $k>0$ i segni sono $+--$ e $\operatorname{sgn}(b)=(3,1)$. Restano i casi limite $k=0,-2$. Per $k=-2$ il polinomio caratteristico diventa $p(\lambda)=(1-\lambda)^2\lambda(\lambda+2)$ sicché $\operatorname{sgn}(b)=(2,1)$ (si ricordi che siamo nel caso rango 3). Per $k=0$, $p(\lambda)=(1-\lambda)^2(\lambda^2-2)$ e $\operatorname{sgn}(b)=(3,1)$. Osserviamo che non avendosi mai la segnatura $(4,0)$, $b$ non può mai essere un prodotto scalare.
(iii) Dalla matrice si legge facilmente che $e_3$ ed $e_4$ sono non isotropi e ortogonali tra loro. Allora passiamo subito a calcolare il complemento ortogonale $\mathcal{L}(e_3,e_4)^\perp$. Sempre leggendo dalla matrice, si trova che $e_1$ ed $e_2$ essendo ortogonali sia ad $e_3$ che $e_4$, sono generatori di $\mathcal{L}(e_3,e_4)^\perp$. Allora conviene scegliere $e_2$ poiché è non isotropo

$b(e_2, e_2) = -1$. Le equazioni di $\mathcal{L}(e_3, e_4, e_2)^\perp$ sono $\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0. \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$ Si ricava il generatore $v = (1, 1, 0, 0)$, con $b(v, v) = k+2$. Esso è pertanto isotropo per $k = -2$. Allora una base diagonalizzante per $b$, indipendentemente da $k$, è $\mathcal{B} = \{ e_3, e_4, e_2, v \}$. Come abbiamo trovato sopra, ne segue che il rango di $b$ è 4 per $k \neq -2$, altrimenti vale 3. Inoltre per $k < -2$ la segnatura di $b$ è $(2, 2)$, per $k = -2$ è $\operatorname{sgn} b = (2, 1)$ e infine per $k > -2$ abbiamo $\operatorname{sgn} b = (3, 1)$.
(iv) Per $k = 0$ la segnatura di $b$ è $(3, 1)$. Per facilità conviene lavorare con le basi diagonalizzanti. Per il teorema degli zeridelle forme quadratiche, dobbiamo cercare un sottospazio di dimensione massima possibile su cui la forma quadratica associata a $b$ abbia segno costante (sempre positivo o sempre negativo), infatti un cambio di segno genera un vettore isotropo. Allora un sottospazio massimale che non contiene vettori isotropi è ad esempio $\mathcal{L}(e_3, e_4, v)$.
(v) Imponendo che il generico vettore $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ sia ortogonale ai generatori di $W$, si ottengono le equazioni di $W^\perp$: $\begin{cases} (k+2)x_1 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ Per $k \neq -2$ abbiamo $W^\perp = \mathcal{L}((0, 1, -1, 0))$ mentre per $k = -2$ si ha $W^\perp = \mathcal{L}((1, 0, 1, 0),\ (0, 1, -1, 0))$.
(vi) Poiché il vettore $(0, 1, -1, 0)$ sta sia in $W$ che in $W^\perp$ indipendentemente da $k$, i due spazi non sono mai a somma diretta.

**Esercizio 2.** Sia $k$ un parametro reale. Si consideri l'endomorfismo $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definito come

$$F\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + kb & ka - b + kc \\ 0 & kd \end{pmatrix}$$

(i) Calcolare la dimensione dell'immagine di $F$ al variare di $k$.

(ii) Trovare l'immagine diretta del sottospazio $U = \left\{ \begin{pmatrix} 2a & b + c \\ b - c & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

(iii) Calcolare la controimmagine della matrice identica per $k = -1$.

(iv) Provare che $F$ è diagonalizzabile per ogni valore di $k$.

(v) Trovare una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ costituita da autovettori per $F$ quando $k = 0$.

(vi) Posto $k = 1$, determinare la matrice associata ad $F$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \}$

**Svolgimento.** (i) La matrice associata ad $F$ rispetto alla base canonica è $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & k & 0 & 0 \\ k & -1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{smallmatrix}\right)$. Tale matrice ha rango 3 per $k \neq 0$, invece è 2 per $k = 0$. Conseguentemente, la dimensione dell'immagine di $F$ è 3 per $k \neq 0$, mentre è 2 per $k = 0$.
(ii) Ricordiamo che l'immagine di un sottospazio vettoriale $U$ è lo spazio generato dalle immagini dei generatori di $U$. Una base di $U$ è data da

$$\mathcal{B} = \{ A_1 = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right),\ A_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right),\ A_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \}.$$

Le immagini sono corrispondentemente: $F(A_1) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2k \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $F(A_2) = \left(\begin{smallmatrix} k & k-1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $F(A_3) = \left(\begin{smallmatrix} k & -k-1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Si osservi che lo spazio immagine $F(U)$ ha dimensione 2 per ogni valore di $k$.
(iii) Per $k = -1$ si ha che la generica immagine di una matrice è $F\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a-b & -a-b-c \\ 0 & -d \end{smallmatrix}\right)$. Si deve allora risolvere l'equazione matriciale $\left(\begin{smallmatrix} a-b & -a-b-c \\ 0 & -d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Si ottiene allora l'insieme (infinito) delle matrici di tipo $\left(\begin{smallmatrix} 1+b & b \\ -1-2b & -1 \end{smallmatrix}\right)$
(iv) La matrice caratteristica associata ad $F$ è $A - \lambda I_4 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & k & 0 & 0 \\ k & -1-\lambda & k & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-\lambda \end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico è allora $p(\lambda) = -\lambda(k-\lambda)[\lambda^2 - k^2 - 1]$. Per $k \neq 0$, $F$ ammette gli autovalori distinti $0, 1, \pm\sqrt{k^2+1}$. Esso è pertanto diagonalizzabile. Per $k = 0$, la matrice $A$ è simmetrica: per il teorema spettrale $F$ è allora diagonalizzabile.
(v) Per $k = 0$ la matrice canonica di $F$ diventa $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ che è una matrice diagonale. Pertanto la base canonica è una base diagonalizzante.

**Esercizio 3.** (i) Portare in forma canonica e classificare la quadrica:

$$\mathscr{Q}: \ 2xy + 2xz - 2z + 1 = 0.$$

(ii) Determinare, se esiste, un piano contenente le rette

$$r_1: \begin{cases} x = y + z \\ y = 0 \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x - 3y - z + 2 = 0 \\ y = 1 \end{cases} \qquad r_3: \begin{cases} y + 2z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

(iii) Trovare le equazioni delle circonferenze nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ che sono tangenti a $r_2$ ed $r_3$ e che hanno il centro su $r_1$.

**Svolgimento.** (i) La matrice associata a $\mathscr{Q}$ è $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. La matrice della parte quadratica è $Q = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Diagonalizziamo la matrice $Q$ rispetto ad una base ortonormale di suoi autovettori così da trovare il cambiamento di coordinate che diagonalizza la parte quadratica di $\mathscr{Q}$. Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - 2)$. Gli autovalori sono allora $\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0$. Una base ortonormale di autovettori è data da $\left\{ (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}),\ (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}),\ (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \right\}$. La matrice del cambiamento di coordinate è $M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$. Il cambiamento di coordinate è $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}z \\ z' = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}z \end{cases}$. Si ottiene allora la quadrica (a meno degli apici) $\mathscr{Q}': \ \sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}y^2 - x - y + \sqrt{2}z + 1 = 0$. Applicando il completamento del quadrato si ottiene $\mathscr{Q}': \ \sqrt{2}(x - \frac{1}{2\sqrt{2}})^2 - \frac{\sqrt{2}}{8} - \sqrt{2}(y + \frac{1}{2\sqrt{2}})^2 + \frac{\sqrt{2}}{8} + \sqrt{2}z + 1 = 0$, che semplificando e usando il cambio di variabili $\begin{cases} x'' = x - \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ y'' = y + \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ z'' = z \end{cases}$, diventa (a meno degli apici) $\mathscr{Q}'': \ \sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}y^2 + \sqrt{2}(z + \frac{1}{\sqrt{2}}) = 0$. Per concludere, il cambio di variabili $\begin{cases} x'' = x \\ y'' = y \\ z'' = -z - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ porta la quadrica nella sua forma canonica $\mathscr{Q}''': \ z = x^2 - y^2$,

da cui si deduce che si tratta di un paraboloide iperbolico.
(ii) Le rette $r_1$ ed $r_3$ sono incidenti nell'origine, pertanto sono complanari. I loro vettori direzionali sono rispettivamente $v_1 = (1,0,1)$ e $v_3 = (1,2,-1)$. Il piano che le contiene ha allora equazione data da $\pi : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$, ovvero $\pi : \ x - y - z = 0$.
Tocca ora stabilire se la retta $r_2$ è contenuta in $\pi$. Le sue equazioni parametriche sono $r_2 : \begin{cases} x = t+1 \\ y = 1. \\ z = t \end{cases}$ Sostituendo nell'equazione di $\pi$ si ottiene l'identità $t+1-1-t = 0$.
Allora il piano $\pi$ è il piano cercato.
(iii) Per comodità osserviamo che le rette $r_1$ ed $r_2$ sono parallele e distinte e che $r_3$ è perpendicolare sia ad $r_1$ che ad $r_2$. Le circonferenze cercate allora giacciono nel piano $\pi$. Poiché i centri devono stare sulla retta $r_1$ e quindi in $\pi$, le circonferenze cercate sono equatori delle sfere che le determinano ed in particolare hanno lo stesso raggio di queste. Data la configurazione delle tre rette, se $C$ è il centro della sfera cercata, si deve allora avere che la distanza di $C$ da $r_3$ deve eguagliare la distanza tra $r_1$ ed $r_2$. Le intersezioni di $r_3$ con $r_1$ ed $r_2$ sono rispettivamente l'origine ed il punto $A = (\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})$. Pertanto $d(r_1, r_2) = d(O, A) = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Cerchiamo allora su $r_1$ i punti che distano dall'origine $\frac{\sqrt{6}}{2}$. Deve essere $\frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{2t^2}$, ovvero $t = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Si ottengono i due centri $C_1(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2})$ e $C_2 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2})$. Le circonferenze cercate sono dunque
$\mathscr{C}_1 : \begin{cases} (x + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + y^2 + (z + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{3}{2} \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ e $\mathscr{C}_2 : \begin{cases} (x - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + y^2 + (z - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{3}{2} \\ x - y - z = 0 \end{cases}$

**Esercizio 4.** Sia data la conica euclidea $\mathscr{C} : 2x^2 - y^2 - 4xy - 4x - 8y - 14 = 0$.

(i) Determinare, se ne ammette, centro, assi di simmetria, asintoti di $\mathscr{C}$.

(ii) Si determini una isometria che porta $\mathscr{C}$ nella sua forma canonica euclidea.

(iii) Determinare una affinità che trasforma $\mathscr{C}$ nella sua forma canonica affine.

(iv) Presa la conica proiettiva $\mathscr{D} :\ X_0^2 - 2X_0X_1 + 2X_0X_2 + 2X_1X_2 = 0$, determinare un cambiamento di coordinate proiettive che manda $\mathscr{D}$ nella sua forma canonica proiettiva. (*Suggerimento: si cerchi una matrice opportuna $M$ tale che con la sostituzione $\boldsymbol{X} = M\boldsymbol{X}'$ si ottiene la forma canonica della curva nelle nuove indeterminate $X_0', X_1', X_2'$*).

**Svolgimento.** (i) La matrice associata a $\mathscr{C}$ è $A = \begin{pmatrix} 14 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice quadratica è invece $Q = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Siccome $\det A = -6 \neq 0$ e $\det Q = -10 < 0$, la conica è un'iperbole generale. Il centro di $\mathscr{C}$ è dato dal sistema $\begin{cases} 2x - 2y - 2 = 0 \\ -2x - y - 4 = 0 \end{cases}$ che produce il punto $C(-1, -2)$. Gli assi di simmetria sono le rette parallele agli autospazi di $Q$ passanti per C. Il polinomio caratteristico di $Q$ è $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 6$ con autovalori 3 e -2. Gli autospazi corrispondenti sono $E(3) = \mathcal{L}(-2, 1)$ con equazione

$x+2y=0$ e $E(-2)=\mathcal{L}(1,2)$, con equazione $2x-y=0$. Gli assi di simmetria allora sono $s_1: \ (x+1)+2(y+2)=x+2y+5=0$ e $s_2: \ 2(x+1)-(y+2)=2x-y=0$. Gli asintoti possono essere determinati in diversi modi. Essi sono le rette passanti per il centro di simmetria e parallele alle rette che si ottengono annullando la parte omogenea di secondo grado dell'equazione di $\mathscr{C}$. Prendiamo $2x^2-y^2-4xy=0$, si ottiene risolvendo rispetto ad y: $y=\dfrac{-4x\pm\sqrt{16x^2+8x^2}}{2}=(-2\pm\sqrt{6})x$ Imponendo il passaggio per $C$, si ottengono gli asintoti: $y=(-2\pm\sqrt{6})x-4\pm\sqrt{6}$. In alternativa si cercano asintoti del tipo $y=mx+q$. Cominciamo con la sostituzione $y=mx$ nell'equazione di $\mathscr{C}$. Si ottiene, guardando solo ai termini di secondo grado, $2x^2-m^2x^2-4mx^2=0$. Dividendo per $x^2$, si trovano i valori $m=-2\pm\sqrt{6}$. Passiamo a calcolare $q$. Si pone ora $y=(-2\pm\sqrt{6})x+q$. Sostituendo nell'equazione di $\mathscr{C}$, siccome i termini di secondo grado si cancellano, guardiamo direttamente ai termini di primo grado in $x$. Si ottiene $-2q(-2\pm\sqrt{6})x-4qx-4x-8(-2\pm\sqrt{6})x=0$. Dividendo per $x$, si trovano i valori $q=-4\pm\sqrt{6}$. Abbiamo ritrovato così gli asintoti ottenuti precedentemente. Un terzo modo a nostra disposizione passa per il piano proiettivo: si tratta di cercare le rette tangenti ai punti impropri di $\mathscr{C}$. Essendo però *calcoloso*, lo trascuriamo.
(ii) La matrice del cambiamento di base ortonormale (dalla base canonica alla base ortonormale di autovettori di $Q$) è $M=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$ (abbiamo scelto i segni delle colonne affinché il determinante sia positivo). La matrice $M^T=M^{-1}$ corrisponde alla rotazione $\rho:\begin{cases}x'=\frac{2}{\sqrt{5}}x-\frac{1}{\sqrt{5}}y\\ y'=\frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{2}{\sqrt{5}}y\end{cases}$ Il cambiamento di variabili determinato da $M$ è $\begin{cases}x=\frac{2}{\sqrt{5}}x'+\frac{1}{\sqrt{5}}y'\\ y'=\frac{-1}{\sqrt{5}}x'+\frac{2}{\sqrt{5}}y'\end{cases}$ che sostituito in $\mathscr{C}$ dà (a meno degli apici):

$$\mathscr{C}': \ 3x^2-2y^2-\frac{4}{\sqrt{5}}(2x+y)-\frac{8}{\sqrt{5}}(-x+2y)-14=3x^2-2y^2-4\sqrt{5}y-14=0.$$

Completando il quadrato nella parte in $y$, si ottiene

$$3x^2-2(y^2+2\sqrt{5}y)-14=3x^2-2(y^2+2\sqrt{5}y+5-5)-14=3x^2-2(y+\sqrt{5})^2-4=0.$$

Applichiamo infine la traslazione $\tau:\begin{cases}X=x'\\ Y=y'+\sqrt{5}\end{cases}$ Si ottiene così la forma canonica di $\mathscr{C}$:

$$\mathscr{C}'': \ 3X^2-2Y^2=4; \quad \frac{X^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}-\frac{Y^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=1.$$

L'isometria usata è $f=\tau\circ\rho:\begin{cases}X=\frac{2}{\sqrt{5}}x-\frac{1}{\sqrt{5}}y\\ Y=\frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{2}{\sqrt{5}}y+\sqrt{5}\end{cases}$
(iii) La forma canonica affine di $\mathscr{C}$ è quella delle iperboli generali: $X^2-Y^2=1$. Per ottenerla basta applicare a $\mathscr{C}''$ un'affinità che riscala opportunamente gli assi cartesiani:

$$g:\begin{cases}x''=\frac{\sqrt{3}}{2}X=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x-\frac{1}{\sqrt{5}}y\right)\\ y''=\frac{1}{\sqrt{2}}Y=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{2}{\sqrt{5}}y+\sqrt{5}\right)\end{cases}$$

(iv) La matrice di $\mathscr{D}$ è $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$. Il rango di $A$ è 3 ed il suo polinomio caratteristico è $p(\lambda)=(\lambda^2-3)(1-\lambda)$. Da questo si deduce che la segnatura di $A$ è $(2,1)$, pertanto $\mathscr{D}$

è una conica generale a punti reali (non vuota). Come nel teorema di classificazione delle coniche proiettive, si deve portare nella forma di Sylvester il polinomio che definisce $\mathscr{D}$. Una base diagonalizzante è trovata usando il metodo induttivo della dimostrazione del Teorema di Gauss Lagrange: $\{(0,0,1), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})\}$.

La matrice del cambiamento di base è allora $M' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$. La sua inversa dà il cambiamento di coordinate cercato: $M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{2\sqrt{6}}{6} & 0 \\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{6} & 0 \end{pmatrix}$ da cui si ottiene:

$$\begin{cases} X_1' = \sqrt{3}(-X_1 + X_2 + X_0) \\ X_2' = -\sqrt{6}(X_1 + 2X_2). \\ X_0' = 3\sqrt{2}X_2 \end{cases}$$

**Esercizio 5. (Alternativo, 10pt)** Nell'opera latina *Enumeratio linearum tertii ordinis* Newton asserisce che ogni curva piana di terzo grado è *equivalente per proiezione e sezione* ad una delle cinque curve prototipo che oggi chiamiamo parabole divergenti di Newton. Con una terminologia moderna possiamo equivalentemente dire che per ogni curva piana di terzo grado si può trovare un cambiamento di coordinate proiettive che la trasforma in una - e solo una - delle cinque parabole divergenti. Ricordiamo che i cambiamenti di coordinate proiettive lasciano invariato il grado di una curva, trasformano punti regolari in punti regolari e punti singolari in punti singolari dello stesso tipo. Come è usuale, con $\overline{\mathscr{C}}$ indichiamo la chiusura proiettiva rispetto a $X_0$ di una curva piana affine $\mathscr{C}$.

Consideriamo le curve affini di terzo grado

$$\mathscr{A}: \ y = x^3, \qquad \mathscr{B}: \ x^3 - xy - 1 = 0, \qquad \mathscr{C}: \ y - x^3 + x^2y = 0.$$

(i) Provare che le tre curve $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ e $\mathscr{C}$ hanno un punto improprio singolare.

(ii) Utilizzando il cambio di coordinate proiettive $F: \begin{cases} Y_0 = X_2 \\ Y_1 = X_1 \\ Y_2 = X_0 \end{cases}$, verificare che la curva $\overline{\mathscr{A}}$ appartiene alla classe della parabola cuspidata. (*Suggerimento: può risultare utile tornare al piano affine dopo aver applicato il cambio di variabili proiettive*).

(iii) Utilizzando il modello di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ come disco con il bordo, disegnare il grafico di $\overline{\mathscr{A}}$.

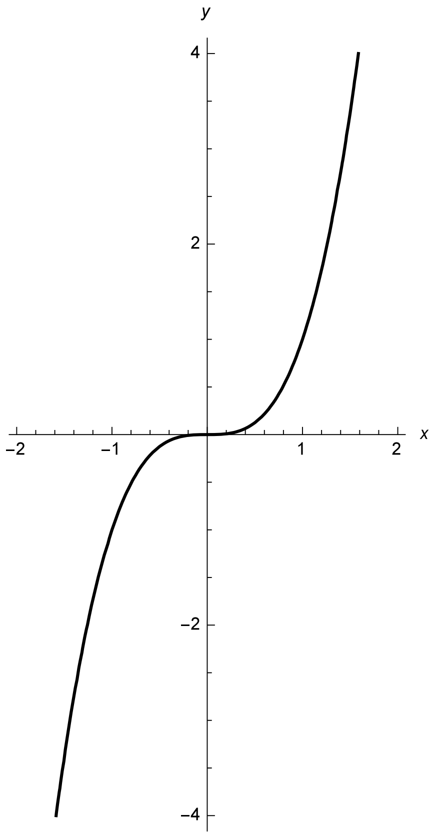
(iv) Utilizzando $F$, provare che $\overline{\mathscr{B}}$ fa parte della classe delle parabole con un nodo. Trovare esplicitamente le tangenti al nodo di $\overline{\mathscr{B}}$ e dedurre l'andamento di $\mathscr{B}$ presso i bordi del piano.

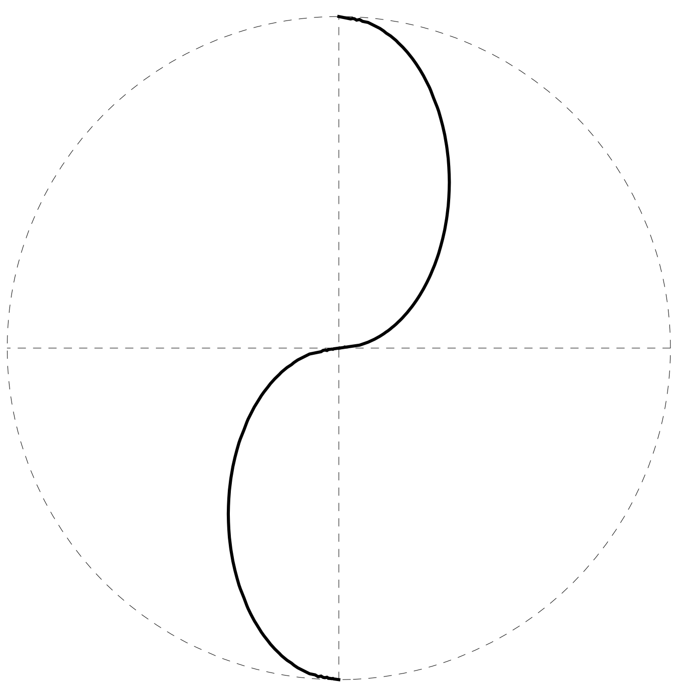
(v) Provare che $\overline{\mathscr{C}}$ ha due punti impropri, uno regolare e uno isolato. Qual è la sua classe di appartenenza? Trovare gli asintoti di $\mathscr{C}$.

**Svolgimento.** (i) Le chiusure proiettive delle tre curve con i relativi gradienti omogenei sono rispettivamente: $\overline{\mathscr{A}}: \ X_1^3 - X_2X_0^2 = 0$ con $\overline{\nabla}_1 = (3X_1^2; \ -X_0^2; \ -2X_0X_2)$,

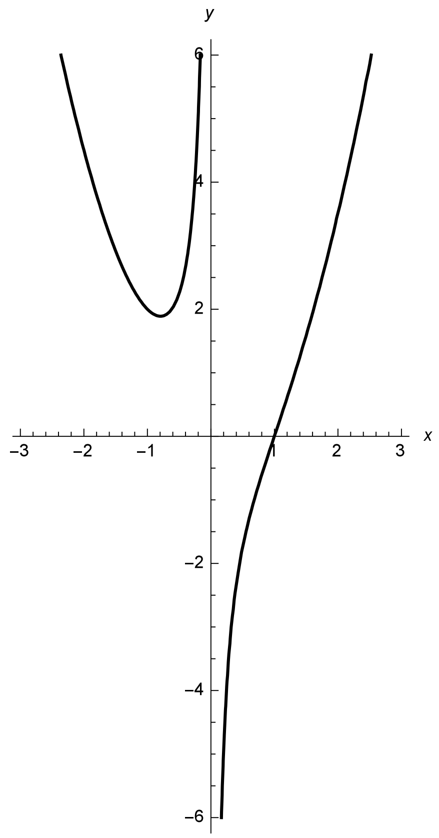
$\overline{\mathscr{B}}:\ X_1^3 - X_0X_1X_2 - X_0^3 = 0$ con $\overline{\nabla}_2 = (3X_1^2 - X_0X_2;\ -X_0X_1;\ -X_1X_2 - 3X_0^2)$ e infine $\overline{\mathscr{C}}:\ X_2X_0^2 - X_1^3 + X_1^2X_2 = 0$ con $\overline{\nabla}_3 = (-3X_1^2 + 2X_1X_2;\ X_0^2 + X_1^2;\ 2X_0X_2)$. Annullando i gradienti si trova che le tre curve proiettive ammettono il punto improprio singolare $Y_\infty = [0,1,0]$.
(ii) Applicando la trasformazione $F$, la curva $\overline{\mathscr{A}}$ diventa $F(\overline{\mathscr{A}}):\ Y_1^3 - Y_0Y_2^2 = 0$. La trasformazione $F$ ha in particolare l'effetto di scambiare il punto improprio $Y_\infty[0,1,0]$ con l'origine $O[0,0,1]$. Passando in coordinate affini rispetto ad $Y_0 = 1$, $Y_1 = u$, $Y_2 = v$, si ottiene la curva $x^3 - v^2 = 0$ che è la parabola cuspidata di Newton. Il complesso tangente è dato da $v^2 = 0$, ovvero $Y_2^2 = 0$, che, ricordando come lavora $F$, diventa $X_0^2 = 0$. Pertanto il bordo del piano $X_0 = 0$ è la tangente cuspidale ad $\overline{\mathscr{A}}$ nel punto improprio.

(iii) Nel piano affine la curva $\mathscr{A}$ ha il ben noto grafico dato in Fig.1. Il grafico della sua chiusura proiettiva per quanto detto sopra è dato in Fig.2. Infatti, data l'identificazione antipodale lungo il bordo del piano proiettivo, la retta impropria è tangente alla curva nel suo punto all'infinito *due volte*. Questo è consistente col fatto che si tratta di una cuspide.

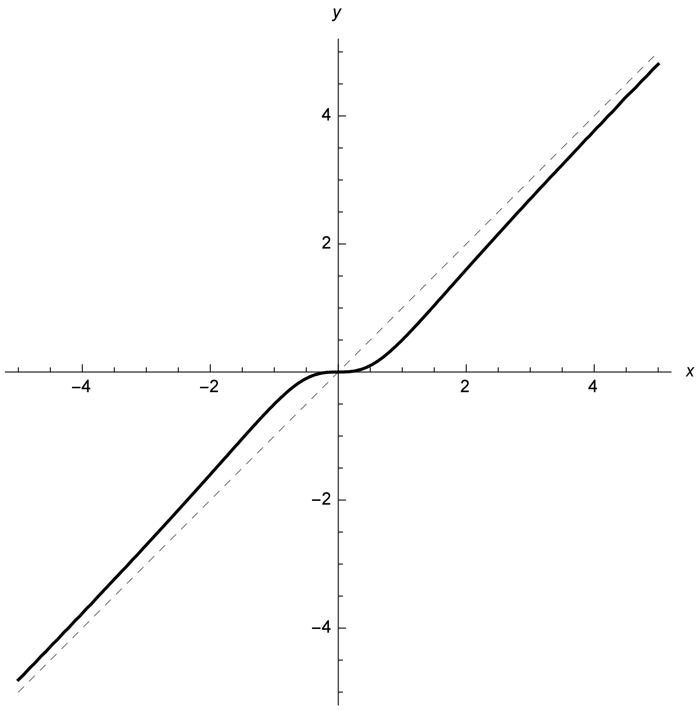


(iv) Trasformando $\overline{\mathscr{B}}$ con $F$, si ottiene la curva $F(\overline{\mathscr{B}}):\ Y_1^3 - Y_1Y_2Y_0 - Y_2^3 = 0$. Passando nelle nuove coordinate affini si trova: $u^3 - uv - v^3 = 0$. in questa curva l'origine è singolare ed è un nodo con tangenti i due assi $u = 0$ e $v = 0$. La curva $\mathscr{B}$ appartiene allora alla classe della parabola nodata di Newton. Nel piano proiettivo le rette tangenti sono allora $Y_1 = 0$ e $Y_2 = 0$, ovvero $X_1 = 0$ ed $X_0 = 0$ che rappresentano l'asse delle $y$ e il bordo del piano affine. Ciò vuol dire che la curva $\mathscr{B}$ ha due rami che vanno all'infinito, uno iperbolico con asintoto l'asse $y$ e uno di tipo parabolico che ha quindi come tangente il bordo del piano. La curva è detta per tale motivo tridente ed ha il grafico riportato di fianco.




(v) Risolvendo il sistema di equazioni che dà i punti impropri di $\overline{\mathscr{C}}$, si trova: $\begin{cases} X_2X_0^2 - X_1^3 + X_1^2X_2 = 0 \\ X_0 = 0 \end{cases}$ e quindi i punti $Y_\infty$ (già trovato precedentemente) e $P[1,1,0]$ che è un punto improprio regolare. Poiché la curva ammette un punto singolare, deve necessariamente appartenere ad una delle classi singolari delle parabole di Newton. Si tratta di classificare il punto $Y_\infty$. Utilizziamo la trasformazione $F$. La curva $\mathscr{C}$ si trasforma in $F(\mathscr{C}): \ Y_0Y_2^2 - Y_1^3 + Y_1^2Y_0 = 0$, che in coordinate affini è $v^2 = u^2(u-1)$. Questa curva è una parabola di Newton con punto isolato nell'origine. Allora anche $\mathscr{C}$ appartiene alla classe delle cubiche con un punto isolato che è situato nel punto all'infinito. Per cercare gli asintoti di $\mathscr{C}$, cerchiamo la retta tangente nel punto improprio regolare $P$. Abbiamo che $\nabla_3(P) = (-1,1,0)$, che dà la retta $X_1 = X_2$ che in coordinate affini è la bisettrice $y = x$. Per completezza diamo il grafico a lato.




**Esercizio Facoltativo.** Sia data una forma bilineare non nulla $b$ **antisimmetrica** su $\mathbb{R}^3$. Dimostrare che $b$ è necessariamente degenere. Provare inoltre che esiste una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto a cui la matrice associata a $b$ sia la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**Svolgimento.** Una forma bilineare antisimmetrica su $\mathbb{R}^3$ ha matrice associata, rispetto a qualsiasi base, antisimmetrica. È ben noto poi che una matrice antisimmetrica di ordine dispari ha determinante nullo. Pertanto $b$ è degenere. Ricordiamo inoltre che per una forma bilineare antisimmetrica si $b(v, v) = 0$, per ogni $v \in \mathbb{R}^3$. Siccome $b$ è non nulla, esistono due vettori indipendenti $u$ e $v$ tali che $b(u, v) = \alpha \neq 0$. Inoltre, per il teorema del completamento della base, esiste una base $\{ u, v, w \}$ di $\mathbb{R}^3$ che contiene i vettori trovati. Poiché $b$ è degenere, la matrice di $b$ rispetto a tale base è del tipo $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Per concludere basta riscalare ad esempio il vettore $w$, prendendo $v' = \frac{1}{\alpha}v$. Rispetto alla base $\{ u, v', w \}$ la forma $b$ ha la matrice richiesta.

## Giugno 2016 - Prova 1

**Esercizio 1. A1)** Sia $A$ una matrice quadrata di ordine 44 con elementi uguali ad 1, 0 oppure -1. Allora

(a) $A$ può avere al massimo rango 30.

(b) $A^3$ non può essere invertibile.

(c) $A$ non può ammettere l'autovalore nullo.

(d) nessuna delle precedenti è vera.

**Svolgimento.** La risposta corretta è la (d). infatti con gli elementi 0, 1 o $-1$ si possono costruire la matrice nulla, che ha l'autovalore nullo, e la matrice identica che ha rango 44 ed è invertibile se elevata alla terza potenza.

**A2)** Sia data la quadrica $\mathscr{Q}: \; x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2x = 0$. Allora

(a) $\mathscr{Q}$ è un'iperboloide.

(b) $\mathscr{Q}$ è un cilindro.

(c) $\mathscr{Q}$ è un paraboloide.

(d) $\mathscr{Q}$ è unione di due piani.

**Svolgimento.** La risposta esatta è la (c). L'equazione può essere facilmente riscritta come $(x+y) + z^2 = 2x$ che, a patto di un cambiamento di coordinate, rappresenta un paraboloide ellittico.

**B1)** Al variare del parametro reale $k$, sono dati in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi

$$W : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_4 - kx_2 - kx_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad U = \mathcal{L}\big((1,1,1,0),\ (0,0,0,0),\ (k,0,0,k)\big)$$

$\boxed{\mathbf{F}}$ Lo spazio $U$ ha dimensione 2 per ogni valore di $k$.

$\boxed{\mathbf{V}}$ Per $k = 0$ gli spazi $W$ e $U$ sono a somma diretta.

$\boxed{\mathbf{F}}$ Per $k = 1$ si ha che $W \oplus U^\perp = \mathbb{R}^4$.

$\boxed{\mathbf{V}}$ Per $k = -1$ lo spazio $U \cap W^\perp$ ha dimensione 1.

**Svolgimento.** Quando $k = 0$, il generatore $(k,0,0,k)$ è nullo. Inoltre, $U$ è generato dal solo vettore $(1,1,1,0)$ che però non appartiene a $W$. Allora $U \cap W = \{\,\mathbf{0}\,\}$ e i due spazi sono a somma diretta. Per $k = 1$, il complemento ortogonale di $U$ ha equazioni cartesiane $U^\perp : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases}$ ed ha base $\mathcal{B} = \{(1,0,-1,-1),\ (0,1,-1,0)\}$. Si trova che i generatori di $W$ e $U^\perp$ non sono indipendenti, quindi i due spazi non sono a somma diretta. Similmente, si trova che $W^\perp$ ha per base i vettori $(1,0,0,0)$ e $(0,1,1,1)$ e che $U + W^\perp$ ha dimensione 3. Quindi l'intersezione dei due spazi ha dimensione 1.

**B2)** Si consideri la curva algebrica piana

$$\mathscr{C}: \ (x+y)xy + x^2 + y^2 = 0.$$

$\boxed{\textbf{F}}$ La curva $\mathscr{C}$ non interseca gli assi.

$\boxed{\textbf{V}}$ La curva $\mathscr{C}$ ammette per asintoti gli assi cartesiani.

$\boxed{\textbf{F}}$ La curva $\mathscr{C}$ non ha punti singolari.

$\boxed{\textbf{V}}$ La curva $\mathscr{C}$ non ha punti singolari impropri.

**Svolgimento.** La curva interseca gli assi nell'origine che è un punto singolare per $\mathscr{C}$. La retta impropria incontra la curva nei tre punti impropri $[1,0,0]$, $[0,1,0]$ e $[1,-1,0]$, tutti necessariamente semplici, poiché la curva ha grado 3. Ciascuno di questi ha per retta tangente a $\overline{\mathscr{C}}$ un asintoto di $\mathscr{C}$.

**B3)** La circonferenza

$$\mathscr{C}: \ x^2 + y^2 - x + 2y - 3 = 0$$

$\boxed{\textbf{V}}$ interseca tutte le rette passanti per il punto $(1; -\frac{3}{2})$.

$\boxed{\textbf{F}}$ ha raggio $r = 4{,}1$.

$\boxed{\textbf{F}}$ ha centro nel punto $(-\frac{1}{2}; 1)$.

$\boxed{\textbf{V}}$ stacca sulla retta $y = x$ una corda di misura $\frac{5}{2}\sqrt{2}$.

**Svolgimento.** La circonferenza ha forma pitagorica $(x - \frac{1}{2})^2 + (y+1)^2 = \frac{17}{4}$. Il suo centro è $(\frac{1}{2}, -1)$ e raggio $r = \frac{\sqrt{17}}{2}$, che è diverso dal *numero razionale* $4,1$. Osserviamo che il punto $(1, -\frac{3}{2})$ è interno alla circonferenza. Infine, se $x = y$, otteniamo i punti di intersezione tra la bisettrice e la circonferenza: $(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \frac{-1+\sqrt{5}}{4})$ e $(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}, \frac{-1-\sqrt{5}}{4})$. Essi distano tra loro $\sqrt{5}$.

**Esercizio 2.** Al variare del parametro reale $k$, si consideri la forma bilineare simmetrica $b$ su $\mathbb{R}^4$ associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sia $W = \mathcal{L}((1,1,0,0),\ (1,0,0,1)) \subset \mathbb{R}^4$ e $W^\perp$ il sottospazio ortogonale di $W$ rispetto a $b$.

(i) Determinare rango e segnatura di $b$ al variare di $k$.

(ii) Al variare di $k$ si trovi una base diagonalizzante per $b$.

(iii) Per quali valori di $k$ i sottospazi $W$ e $W^\perp$ sono a somma diretta?

**Svolgimento.** Abbiamo che $\det A = k^2 + 1$, quindi $\operatorname{rk} A = 4$, per ogni $k \in \mathbb{R}$. Procedendo per induzione, si trova la base diagonalizzante

$$\mathcal{B} = \{e_1,\, v_2 = e_2 + e_3,\, v_3 = e_2 - e_3,\, v_4 = -ke_1 + e_4\}.$$

Si ha $Q(e_1) = 1$, $Q(v_2) = 2$, $Q(v_3) = -2$ e $Q(v_4) = -k^2 - 1$. Allora, indipendentemente da $k$, $\operatorname{sgn} Q = (2, 2)$. Lo spazio $W^\perp$ è definito dalle equazioni $\begin{cases} x + kt + z = 0 \\ x + kt + kx - t = 0. \end{cases}$ Per $k \neq -1$, una sua base è data dai vettori $w_1 = (0, 1, 0, 0)$ e $w_2 = (\frac{1-k}{k+1}, 0, -\frac{k^2+1}{k+1}, 1)$. In tal caso $W$ e $W^\perp$ sono a somma diretta. Se invece $k = -1$, $W^\perp = \mathcal{L}((0, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0))$ che è a somma diretta con $W$.

**Esercizio 3.** Al variare di $k \in \mathbb{R}$, è dato l'endomorfismo $F$ di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definito da:

$$F\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & k-1 \end{pmatrix} \quad F\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & k \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

(i) Determinare la dimensione del nucleo e dell'immagine di $F$ al variare di $k$.

(ii) Determinare una base del nucleo e dell'immagine di $F$ al variare di $k$.

(iii) Determinare la controimmagine della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ al variare di $k$.

(iv) Stabilire per quali valori di $k$ l'endomorfismo $F$ è diagonalizzabile e determinare una base diagonalizzante in corrispondenza di uno di tali valori.

**Svolgimento.** Rispetto alla base canonica $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la matrice di $F$ è $M(F) = \begin{pmatrix} -k & 0 & 1 & -k \\ k & 1 & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & k \end{pmatrix}$. Il determinante di $M(F)$ è $-k^2$. Quindi per $k \neq 0$, il nucleo di $F$ è banale (dimensione zero) e l'immagine è $\mathbb{R}^4$ (dimensione 4). Se invece $k = 0$, il rango di $M(F)$ è 2. Inoltre $\operatorname{Ker} F = \mathcal{L}(E_2, E_3)$ e $\operatorname{Im} F = \mathcal{L}(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix})$, entrambi di dimensione 2. La controimmagine di $A$ è data dalla soluzione generale del sistema lineare $\begin{cases} -kx + z - kt = 1 \\ kx + y + kt = 1 \\ z = 0. \\ (k-1)z + kt = 0 \end{cases}$ Per $k = 0$ il sistema è impossibile. Per $k \neq 0$, si ottengono invece le matrici di tipo $\begin{pmatrix} -\frac{1}{k} & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico di $M(F)$ è $p(\lambda) = -(1-\lambda)^2(k-\lambda)(k+\lambda)$. Quando $k = 0$, la matrice di $F$ diventa $M(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Si hanno i due autovalori 1 e 0 entrambi con molteplicità algebrica 2. Si calcola che entrambi hanno molteplicità geometrica 2. Quindi $F$ è diagonalizzabile. Quando invece $k = 1$, l'autovalore 1 ha molteplicità algebrica 3 ma geometrica 2, quindi $F$ non è diagonalizzabile. Se poi $k = -1$, l'autovalore 1 ha molteplicità algebrica 3, mentre la geometrica è 2. Allora $F$ non è diagonalizzabile. Infine, per $k \neq 0, 1, -1$, gli autovalori sono $k, -k$ con molteplicità 1, e 1 con molteplicità algebrica e geometrica 2. Ne segue che $F$ è diagonalizzabile.

**Esercizio 4.** Nello spazio sono date le rette

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ z = 2y \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} y = 1 \\ z = x \end{cases}$$

(i) Stabilire la posizione reciproca tra $r$ ed $s$.

(ii) Calcolare la distanza tra $r$ ed $s$.

(iii) Determinare le equazioni delle sfere che hanno centro sul piano $\pi : x+y+z = 0$, che sono tangenti alla retta $r$ nel punto $A(1, 0, 0)$ e che sono tangenti alla retta $s$.

**Svolgimento.** Le due rette sono sghembe e la loro distanza vale $\sqrt{\frac{1}{6}}$.
Il centro delle sfere cercate deve appartenere al piano passante per $A$ e perpendicolare ad $r$. Prendiamo il vettore direzionale $v_r(0, 1, 2)$. I piani perpendicolari ad $r$ sono del tipo $y + 2z + k = 0$, con $k$ parametro. Quello passante per $A$ è $\pi' : y + 2z = 0$. Il centro $C$ delle sfere allora sta sulla retta data dall'intersezione di $\pi$ e di $\pi'$: $\begin{cases} y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$
Quindi $C$ ha coordinate di tipo $C(t, -2t, t)$. Se le sfere sono anche tangenti ad $s$ (non si precisa in quale punto), il punto $C$ deve stare nei piani perpendicolari ad $s$ che hanno equazione di tipo $x + z + h = 0$, con $h$ parametro. Allora deve essere $h = -2t$ ed il piano cercato è $\sigma : x+z-2t = 0$. L'intersezione tra $\sigma$ ed $s$ dà il punto di tangenza $T$ tra la sfera e la retta $s$. Questo è $T(t, 1, t)$ (in corrispondenza dello stesso valore del parametro $t$ rispetto a cui abbiamo indicato il centro $C$). Per determinare il valore cercato di $t$, dobbiamo imporre l'uguaglianza tra i raggi $CT$ e $CA$. Si trova: $t = 0$ che dà $C(0, 0, 0)$ e $t = 1$, che dà il punto $C(1, -2, 1)$. Le sfere sono quindi $\mathcal{S}_1 : x^2+y^2+z^2 = 1$ e $\mathcal{S}_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z + 1 = 0$.

**Esercizio 5.** Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, sia data la famiglia di coniche

$$\mathscr{F} : kx^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0.$$

Si consideri poi la conica proiettiva

$$\mathscr{A} : X_1^2 + 2X_2^2 - X_0^2 + 2X_1X_2 - 2X_2X_0 = 0.$$

(i) Provare che la famiglia $\mathscr{F}$ è costituita da coniche tutte degeneri.

(ii) Classificare al variare di $k$ le coniche della famiglia $\mathscr{F}$.

(iii) Trovare un cambiamento di coordinate omogenee che porta la conica $\mathscr{A}$ nella sua forma canonica proiettiva.

(iv) Provare che non esiste alcun cambiamento di coordinate omogenee che trasforma la chiusura proiettiva delle coniche della famiglia $\mathscr{F}$ nella conica $\mathscr{A}$.

**Svolgimento.** La matrice delle coniche della famiglia $F$ è data da $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & k & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Indipendentemente da $k$, tale matrice è singolare, quindi tutte le coniche della famiglia $\mathscr{F}$ sono degeneri. In particolare, il determinante della matrice quadratica è $k-4$. Quindi per $k=4$ si ha la parabola degenere che ha per grafico la retta $y=1-2x$ contata due volte. Per $k>4$ otteniamo delle ellissi singolari che hanno per grafico il punto $P(0,1)$. Se invece $k<4$, abbiamo delle iperboli degeneri.

La conica $\mathscr{A}$ ha matrice associata $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ che ha rango 3. Pertanto la chiusura proiettiva delle coniche della famiglia $\mathscr{F}$ non può essere trasformata nella conica $\mathscr{A}$. Una base ortogonale che diagonalizza la matrice $Q$ è $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
L'inversa di $M$ è la matrice che definisce il cambiamento di coordinate per portare la conica nella sua forma canonica proiettiva. Si trova $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ che produce il cambiamento: $\begin{cases} X_1' = X_1 - X_2 \\ X_2' = X_1 - X_0 \\ X_0' = X_2 \end{cases}$.