Università degli Studi Roma Tre – Corso di laurea in Matematica
GE210-Geometria 2 – A.A. 2016-2017 – SECONDO ESONERO

NOME .... MATRICOLA ....

ESERCIZIO 1. Portare in forma canonica e classificare la quadrica

$$\mathcal{Q}: \; xy + yz + xz - x + 2z + 2 = 0.$$

ESERCIZIO 2. Siano date le curve algebriche piane affini $\mathscr{C}: \ p(x,y) = 0$ e $\mathscr{D}: \ q(x,y) = 0$.

(a) Dimostrare che anche $\mathscr{C} \cup \mathscr{D}$ è una curva algebrica definita dal polinomio $p(x,y) \cdot q(x,y)$.

(b) Detto $Sing(\mathscr{C})$ l'insieme dei punti singolari della curva $\mathscr{C}$, dimostrare che vale la formula

$$Sing(\mathcal{C} \cup \mathscr{D}) = Sing(\mathscr{C}) \cup Sing(\mathscr{D}) \cup (\mathscr{C} \cap \mathscr{D})$$

(c) Determinare i punti singolari della curva $\mathscr{C}: \ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 - y^2) = 0$.

ESERCIZIO 3. Siano date in $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ le rette

$$r_1 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} 2y + z + 2 = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \qquad r_3 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Calcolare le mutue distanze delle tre rette prese a due a due.

ESERCIZIO 4. Sia data la conica proiettiva

$$\mathscr{C}:\ X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 - 2X_0X_1 + 4X_1X_2 = 0.$$

(a) Trovare un cambio di coordinate omogenee che porta $\mathscr{C}$ nella sua forma canonica proiettiva.

(b) Provare che $\mathscr{C}$ è di tipo iperbolico.

(c) Detta $\mathscr{C}_0$ la parte affine di $\mathscr{C}$, ottenuta deomogenizzando rispetto alla variabile X_0, determinare centro e asintoti di $\mathscr{C}_0$.

ESERCIZIO 5. Sia k un parametro reale. Si considerino la sfera ed il piano

$$\mathcal{S}: \ x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 + 2z + 2 = 0 \qquad\qquad \pi: \ x + 2y + 2z + k = 0.$$

(a) Determinare la posizione reciproca di $\mathcal{S}$ e π al variare di k.

(b) Posto $k = 1$ trovare raggio e centro della circonferenza $\mathcal{S} \cap \pi$.

ESERCIZIO 6. Si consideri la curva algebrica affine

$$\mathscr{C}: \ x^5 + y^5 - 5x^2 y = 0.$$

(a) Calcolare la molteplicità di intersezione in $O(0,0)$ tra $\mathscr{C}$ e le rette passanti per O.

(b) Dimostrare che l'unico punto singolare di $\mathscr{C}$ è l'origine O e determinare le tangenti principali a $\mathscr{C}$ in O.

(c) Determinare gli eventuali asintoti di $\mathscr{C}$.

(d) Tracciare il grafico di $\mathscr{C}$.