

Università degli Studi Roma Tre  
Corso di laurea in Matematica  
GE210-Geometria 2 – A.A. 2015-2016  
SECONDO ESONERO

**Esercizio 1.** Siano  $r$  ed  $s$  due rette nello spazio euclideo con vettori direzionali  $v_r$  e  $v_s$  rispettivamente. Siano poi  $R \in r$  e  $S \in s$  due punti. Provare che  $r$  ed  $s$  sono sghembe se e solo se si ha

$$v_r \wedge v_s \cdot \overrightarrow{RS} \neq 0.$$

**Esercizio 2.** Si consideri la conica euclidea

$$\mathcal{C} : 2x^2 - y^2 - 4xy - 4x - 8y + 14 = 0.$$

- (a) Classificare  $\mathcal{C}$ .
- (b) Se ne ammette, determinare gli assi di simmetria, gli asintoti, il centro di simmetria di  $\mathcal{C}$ .
- (c) Trovare una forma canonica  $\mathcal{C}'$  per  $\mathcal{C}$  e determinare un'isometria  $f$  che trasforma  $\mathcal{C}$  in  $\mathcal{C}'$ .
- (d) Esiste una proiettività che trasforma la chiusura proiettiva di  $\mathcal{C}$  rispetto a  $X_0$  nella conica proiettiva  $\mathcal{D} : X_0^2 + 2X_1X_2 - 4X_0X_2 + X_0X_1 = 0$ ?

**Esercizio 3.** Si consideri la curva algebrica

$$\mathcal{C} : x(x + y + 1)y + x^2 + y^2 = 0.$$

- (a) Trovare la tangente a  $\mathcal{C}$  nel punto  $P(4, \frac{2}{\sqrt{5}} - 2)$ .
- (b) Trovare i punti singolari di  $\mathcal{C}$ .
- (c) Trovare gli asintoti di  $\mathcal{C}$ .
- (d) Tracciare il grafico di  $\mathcal{C}$ .

**Esercizio 4.** Portare in forma canonica e classificare la quadrica di equazione:

$$\mathcal{Q} : x^2 + 2yz + 1 = 0.$$

**Esercizio 5.** Sono date nello spazio euclideo le rette  $r : \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 13 \\ z = 2 + 4t \end{cases}$  ed  $s : \begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0 \\ 2y + z - 1 = 0. \end{cases}$

Classificare la loro posizione reciproca e determinare la loro distanza.

**Esercizio 6.** È data nello spazio la sfera

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2 = 0.$$

- (a) Determinare raggio e centro di  $\Sigma$ .
- (b) Detta  $C$  la circonferenza di intersezione tra  $\Sigma$  e il piano  $\alpha : 6y - 2z + 1 = 0$ , determinare raggio e centro di  $C$ .
- (c) Determinare il piano tangente a  $\Sigma$  nel punto  $A(1, -1, 2)$ .