Università degli Studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2014-2015
GE210 - Geometria 2
Prova in preparazione al primo esonero - Soluzioni

Esercizio 1. Siano dati nel piano affine reale $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ le rette

$$r:\ y = 0, \qquad s:\ y = x, \qquad t:\ x = 0$$

ed i punti

$$A = (1,0), \qquad B = (2,2), \qquad C = (0,-1).$$

Stabilire se esiste un'affinità $f : \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ tale che

$$f(r) = s, \qquad f(s) = t, \qquad f(A) = B, \qquad f(B) = C$$

ed in caso affermativo, determinarla esplicitamente.
Stabilire inoltre se tale affinità è unica.

Svolgimento. Cominciamo col fare alcune osservazioni preliminari. Le tre rette date si incontrano nell'origine $O = (0,0)$. Inoltre si ha che $A \in r$, $B \in s$ e $C \in t$. Ha quindi senso cercare un'affinità con le proprietà richieste: la condizione di appartenenza è conservata sotto f come anche le condizioni di incidenza:

$$\begin{aligned} A \in r \qquad &\Rightarrow \qquad f(A) = B \in f(r) = s \\ B \in s \qquad &\Rightarrow \qquad f(B) = C \in f(s) = t \\ r \cap s = O \qquad &\Rightarrow \qquad f(r) \cap f(s) = s \cap t = O = f(O) \end{aligned}$$

In particolare, l'affinità cercata deve fissare il punto O: $f(O) = O$.

Sappiamo che esiste ed è unica l'affinità $f\ \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ tale che

$$f(A) = B \qquad f(B) = C \qquad f(O) = O$$

a patto che $\mathcal{B} = \left\{ \overrightarrow{OA} = (1,0),\ \overrightarrow{OB} = (2,2) \right\}$ e $\mathcal{B}' = \left\{ \overrightarrow{OB} = (2,2),\ \overrightarrow{OC} = (0,-1) \right\}$ siano basi di $\mathbb{R}^2$. Poiché ciò è vero, f ha equazione

$$f(x,y) = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

dove M è la matrice dell'automorfismo di $\mathbb{R}^2$ che trasforma la base $\mathcal{B}$ nella base $\mathcal{B}'$ e $(c_1, c_2)^T = f(O) = O = (0,0)$. Con semplici passaggi si trova: $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$ e quindi

$$f(x,y) = \left(2x - 2y, \quad 2x - \tfrac{5}{2}y\right).$$

Trovata l'equazione di f, bisogna ora accertarsi che l'immagine di C sia coerente con i risultati trovati. Infatti le condizioni imposte non hanno coinvolto C. Poiché $\overrightarrow{OC}$ è linearmente indipendente da $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ ed essendo f un affinità, l'immagine del punto C non rischia di cadere in s o t, violando le condizioni di appartenenza iniziali, ovvero $C \notin r \cup s$. Possiamo quindi concludere che l'affinità cercata esiste ed è unica.

Esercizio 2. Si consideri la forma quadratica $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da

$$q(x, y, z) = 6xz + 6yz - 2xy - x^2 - y^2 - 9z^2.$$

(i) Detta B la forma bilineare simmetrica polare di q, determinare la matrice di B associata rispetto alla base $\{ (-1, 1, 1), (2, 1, 0), (0, 0, 1) \}$ di $\mathbb{R}^3$.

(ii) Determinare il rango e la segnatura di q.

(iii) Stabilire se il cono isotropo di $\mathbb{R}^3$ rispetto a B è banale.

(iv) Determinare il radicale di $\mathbb{R}^3$ rispetto a B.

(v) Sia
$$W = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x = y \right\}.$$
Determinare il complemento ortogonale $W^\perp$ di W rispetto alla forma B. Dire inoltre se
$$W \oplus W^\perp = \mathbb{R}^3.$$

Svolgimento. Data l'identificazione, parleremo indistintamente della matrice di q e di B. Per il calcolo del rango e della segnatura di q, conviene calcolare dapprima la matrice di q rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$. Facilmente si ottiene

$$M_{\mathcal{E}}(q) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

Da questa espressione si deduce immediatamente che $\operatorname{rank} q = 1$. A partire da questa espressione, è ora più facile calcolare la matrice di q rispetto alla base $\mathcal{B}$ della traccia. Per svolgere meno calcoli possibile, osserviamo preliminarmente che la matrice sarà di rango uno e che sarà simmetrica. Allora, per completarla basterà trovare soltanto la prima riga di $M_{\mathcal{B}}(q)$. In particolare abbiamo:

$$a_{11} = (-1, 1, 1) M \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -9;$$

$$a_{12} = (2, 1, 0) M \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 9;$$

$$a_{13} = (0, 0, 1) M \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -9;$$

Essendo $a_{31} = a_{13}$, segue che la terza riga è uguale alla prima. Essendo invece $a_{21} = -a_{12}$, segue che la terza seconda è l'opposto della prima. In conclusione,

$$M_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} -9 & 9 & -9 \\ 9 & -9 & 9 \\ -9 & 9 & -9 \end{pmatrix}$$

Resta da calcolare la segnatura di q rispetto ad una base diagonalizzante. Siccome $\operatorname{rank} q = 1$, una qualsiasi base diagonalizzante per q sarà composta da un vettore non isotropo e da due vettori isotropi. Poiché le prime due colonne della matrice $M_{\mathcal{E}}$ sono uguali ed essendo la terza colonna della stessa matrice -3 volte la prima, conviene utilizzare la base

$$\mathcal{B}' = \{\, v_1 = e_1,\ v_2 = e_2 - e_1,\ v_3 = 3e_1 + e_3 \,\}$$

Otteniamo immediatamente la matrice diagonale:

$$M_{\mathcal{B}'}(q) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Possiamo concludere che $\operatorname{sgn} q = (0,1)$, ovvero $\operatorname{ip}(q) = 0$ e $\operatorname{in}(q) = 1$. Si poteva già dedurre una volta calcolato il rango di q che il cono isotropo è non banale. In particolare dalla forma diagonale trovata deduciamo che il cono isotropo è un sottospazio vettoriale di dimensione 2 di $\mathbb{R}^2$, precisamente esso è $\mathscr{C}_q(\mathbb{R}^3) = \mathcal{L}(v_2,\ v_3)$, essendo v_2 e v_3 ortogonali.

Il radicale di V è dato dai vettori di $\mathbb{R}^3$ che sono ortogonali a tutti gli altri. In particolare questi saranno ortogonali alla base canonica. A ben vedere, il radicale di V coincide col nucleo di $M_{\mathcal{E}}(q)$. Essendo $\operatorname{rank} q = 1$, per descrivere $V^\perp$ basta una sola equazione. Ad esempio l'ortogonalità contro e_1: $-x - y + 3z = 0$. Si ottiene $V^\perp = \{\, (-1,1,0), (3,0,1) \,\}$. Si osservi che questo coincide col cono isotropo di q.

Lo spazio $W = \mathcal{L}((1,1,0),(0,0,1)$. Il suo complemento ortogonale è dato dalle condizioni di ortogonalità contro i suoi generatori. In realtà si ottiene la stessa condizione. Allora

$$W^\perp = \left\{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y - 3z = 0 \,\right\}.$$

Ne segue $W^\perp = V^\perp = \mathscr{C}_q$.

Esercizio 3. Siano dati gli operatori lineari di $\mathbb{R}^2$ definiti da:

(i) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $F(1,0) = (\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})$, $\quad F(0,1) = (-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})$

(ii) $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $F(1,0) = (\frac{5}{13},\ \frac{12}{13})$, $\quad F(0,1) = (-\frac{12}{13},\ \frac{5}{13})$

(iii) $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $F(1,0) = (-\frac{3}{7},\ -\frac{\sqrt{40}}{7})$, $\quad F(0,1) = (-\frac{\sqrt{40}}{7},\ \frac{3}{7})$

Stabilire quali tra essi sono operatori unitari. Distinguere tra questi le rotazioni e le simmetrie. Determinare l'angolo di rotazione per le rotazioni e l'asse di simmetria per le simmetrie.

Svolgimento. Rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$ le matrici dei tre operatori sono:

$$M(F) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad M(G) = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ -\frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix} \qquad M(H) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & -\frac{\sqrt{40}}{7} \\ -\frac{\sqrt{40}}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

La prima delle tre ha determinante diverso da ± 1, allora F non è un operatore unitario. G è una rotazione di angolo $\vartheta = \arccos \frac{5}{13}$. L'operatore H è invece una simmetria assiale rispetto alla retta che ha per direzione il generatore dell'autospazio associato all'autovalore $+1$: $r:\ 10x + \sqrt{40}\, y = 0$.