Sapienza Università di Roma - Facoltà I3S
Corso di Laurea in Statistica Economia Finanza e Assicurazioni
Programma† di Matematica II corso - A.A. 2017-2018
Prof. Antonio Cigliola

Prerequisiti

Introduzione alla logica elementare. Linguaggio formale. Concetti primitivi e postulati. Proposizioni elementari. Connettivi logici: congiunzione, disgiunzione, negazione, implicazione e equivalenza logica. Condizioni necessarie e sufficienti. Tavole di verità. Leggi di De Morgan, doppia negazione, idempotenza, commutatività, principio del terzo escluso e di non contraddizione. Tautologie e contraddizioni. Tecniche dimostrative: dimostrazione diretta, dimostrazione della contronominale, dimostrazione per assurdo. Logica predicativa. Predicati e variabili. Quantificatore esistenziale e quantificatore universale. Negazione dei quantificatori. Insiemi ed elementi. Rappresentazione di insiemi. Inclusione ed uguaglianza tra insiemi. Insieme vuoto. Unione, intersezione e differenza tra insiemi. Complementare di un insieme. Proprietà delle operazioni tra insiemi. Insieme delle parti. Prodotto cartesiano di insiemi.

Numeri reali

Assiomi di Peano e fondazione dell'aritmetica. Insiemi numerici: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$. Numeri decimali periodici. Irrazionalità di $\sqrt{2}$. Postulato dell'esistenza di un campo ordinato e completo: l'insieme dei numeri reali: $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$. Assiomi di campo, assiomi di ordinamento e assioma di continuità. Proprietà delle operazioni: unicità dello zero, di uno, dell'opposto e dell'inverso; leggi di cancellazione; legge di annullamento del prodotto. Proprietà dell'ordinamento. Introduzione delle relazioni d'ordine $\geqslant$, $<$, $>$. Numeri positivi e numeri negativi. Regola dei segni. Principi di equivalenza delle disuguaglianze. Applicazione dell'assioma di continuità per provare che $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$. Teorema della radice n-esima. Intervalli di $\mathbb{R}$. Valore assoluto. Proprietà. Disuguaglianza triangolare.

Estremo superiore

Massimo e minimo di un insieme di numeri reali. Unicità del massimo e del minimo. Maggioranti e minoranti. Insiemi limitati superiormente. Insiemi limitati inferiormente. Insiemi limitati. Insiemi illimitati inferiormente. Insiemi illimitati superiormente. Caratterizzazione degli insiemi limitati. Estremo superiore. Estremo inferiore. Teorema di esistenza dell'estremo superiore. Teorema di esistenza dell'estremo inferiore. *Teorema di caratterizzazione dell'estremo superiore. Teorema di caratterizzazione dell'estremo inferiore.* Introduzione dei simboli $+\infty$ e $-\infty$ per indicare estremo superiore ed inferiore di insiemi illimitati superiormente e insiemi illimitati inferiormente. Proprietà di Archimede. Proprietà di densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. *Proprietà di densità di* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *in* $\mathbb{R}$.

Topologia della retta reale

Introduzione alla topologia della retta reale. Distanza euclidea sulla retta reale. Proprietà. Intorni di punti reali. Intersezioni e unioni di intorni. Punti interni, punti esterni, punti di frontiera di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Parte interna, parte esterna, frontiera di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Esempi vari. Punti di accumulazione, punti isolati di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Esempi vari.

Funzioni reali

Funzioni. Funzione identica. Funzione costante. Funzioni reali di variabile reale. Funzioni definite a tratti. Funzione di Dirichlet. Principio di uguaglianza tra funzioni. Restrizione di una funzione. ominio naturale (insieme di definizione) di una funzione. Immagine di un sottoinsieme del dominio. Controimmagine di un elemento e di un sottoinsieme dell'insieme di arrivo. Funzioni iniettive, suriettive, biettive. Funzioni crescenti e decrescenti. Funzioni monotone. Funzioni pari e dispari. Funzioni invertibili. *Proprietà della funzione inversa e delle funzioni invertibili.* Una funzione è

†Degli enunciati in corsivo non è stata data la dimostrazione durante le lezioni.

invertibile se e solo se è biettiva. Costruzione delle inverse di funzioni invertibili. Grafici di funzioni: come interpretarli per dedurre la non iniettività, l'insieme immagine e il grafico della funzione inversa. Grafici di funzioni elementari. Funzioni lineari, funzione costante e funzione valore assoluto. Funzioni potenze e funzioni radici. Funzioni goniometriche e funzioni goniometriche inverse. Funzione esponenziale e funzione logaritmo. Funzione segno. Funzione parte intera. Funzione parte frazionaria. Estremo superiore, estremo inferiore, massimo, minimo di una funzione reale. Punti di massimo e punti di minimo di una funzione. Punti estremanti. Segno di una funzione.

Limiti di funzioni

Limiti di funzioni reali di una variabile reale. Osservazioni e considerazioni sulla definizione. Verifica dei limiti applicando la definizione. Limiti infiniti. Limiti all'infinito. Intorni di $+\infty$. Intorni di $-\infty$. Retta reale estesa. Definizione topologica di limite. Se una funzione $f(x)$ ammette limite l, allora la funzione $-f(x)$ammette limite $-l$ e la funzione $f(x)-l$ ammette limite 0. Esempi di funzioni che non ammettono limite. Teorema di unicità del limite. Teoremi di permanenza del segno. Teoremi del confronto. Teorema dei carabinieri. Applicazioni. Se la funzione $f(x)$ ammette limite l, allora la funzione $|f(x)|$ammette limite $|l|$. Non vale in generale il viceversa. Teoremi di addizione e sottrazione dei limiti. Forme indeterminate di tipo $[+\infty-\infty]$. Lemma di limitatezza locale. *Teoremi di moltiplicazione dei limiti.* Forme indeterminate del tipo $[0\cdot\infty]$. *Teorema sul limite della funzione reciproco.* Limiti della potenza n-esima di una funzione. Limiti di funzioni polinomiali. Limite del rapporto di funzioni. Forme indeterminate di tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$ e $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Limite destro e limite sinistro. Teorema fondamentale di esistenza del limite in termini di limite destro e limite sinistro. *Teoremi sui limiti di funzioni monotone.* Limiti delle funzioni elementari.

Funzioni continue

Funzioni continue. La somma, la differenza, il prodotto, il reciproco (dove definito) e il rapporto (dove definito) di funzioni continue sono funzioni continue. Esempi di funzioni non continue. Le funzioni elementari sono continue. Teorema di continuità della composta di funzioni continue. Continuità delle funzioni potenza ad esponente irrazionale. Teorema di continuità della funzione inversa. Limiti notevoli. Regole di calcolo dei limiti. Punti di discontinuità di una funzione. Discontinuità eliminabili. Discontinuità di tipo salto. Discontinuità di seconda specie. Teorema di permanenza del segno per le funzioni continue. *Teorema di Weierstrass. Teorema degli zeri di Bolzano. Teorema dei valori intermedi di Darboux. Teorema di D'Alembert* (per gli zeri di un polinomio a coefficienti reali).

Calcolo differenziale

Introduzione alle derivate. Motivazione geometrica e breve storia della disputa Leibnitz-Newton. La derivata di una funzione in un punto. Funzione derivata. Esempi di calcolo. Se una funzione è derivabile in un punto, allora è anche continua in quel punto. La funzione valore assoluto è continua ma non è derivabile in zero. Derivata destra e derivata sinistra in un punto. Teorema di derivazione della somma di funzioni. Teorema di derivazione del prodotto di due funzioni. Teorema di derivazione della funzione reciproco. Teorema di derivazione del rapporto di due funzioni. *Teorema di derivazione della funzione composta. Teorema di derivazione della funzione inversa.* Derivate delle funzioni circolari inverse. Derivate di ordine superiore al primo. Classi di regolarità di funzioni reali. Differenziali. Teorema di Rolle. Teorema del valor medio di Lagrange. Interpretazione geometrica. Se una funzione definita su un intervallo ha derivata nulla, allora essa è costante su tale intervallo. Due funzioni che hanno la stessa derivata su un intervallo si differiscono per una costante. Se una funzione continua ha derivata positiva (negativa) su un intervallo, allora è crescente (decrescente) su tale intervallo. Inversione debole. *Teorema di De l'Hopital.* Criterio di derivabilità. Punti di massimo e di minimo locali. Punti stazionari. Teorema di Fermat (per i punti di massimo e minimo locali interni al dominio). Criterio del prim'ordine. *Criterio del second'ordine.* Funzioni concave e convesse. *Studio della convessità di una funzione per mezzo della derivata seconda.* Confronto di infinitesimi in un intorno di un punto. Notazione o-piccolo di Landau. Formula di Taylor (con il resto di Peano). Formula di Mac-Laurin (con il resto di Peano). Applicazioni varie. Punti di non derivabilità. Punti angolosi. Punti di flesso a tangente verticale. Punti di cuspide. Asintoti orizzontali. Asintoti verticali. Asintoti obliqui. Metodi di calcolo degli asintoti. Studio del grafico di una funzione reale.

Calcolo integrale

Calcolo integrale: motivazione storica. Calcolo dell'area di un rettangoloide sotteso ad una funzione limitata definita su un intervallo chiuso e limitato. Partizione di un intervallo limitato. Somma integrale inferiore e somma integrale superiore relativa ad una partizione. Esempio di calcolo per una funzione costante. *Le classi delle somme integrali superiori e delle somme integrali inferiori sono separate.* Funzioni integrabili secondo Riemann. La funzione di Dirichlet non è integrabile secondo Riemann. *Le funzioni continue e le funzioni monotone, definite su un intervallo chiuso e limitato, sono integrabili secondo Riemann.* Additività dell'integrale definito rispetto al dominio. *Linearità dell'integrale definito rispetto alla funzione integranda. Proprietà di monotonia e di posititività dell'integrale definito. Diseguaglianza triangolare generalizzata per l'integrale definito.* Teorema della media integrale. Funzione integrale. Teorema fondamentale del Calcolo Integrale (di Torricelli-Barrow). Primitiva di una funzione. Due primitive di una funzione differiscono per una costante. Teorema di Newton (formula fondamentale del calcolo integrale). Integrali indefiniti. Proprietà di linearità dell'integrale indefinito. Integrali indefiniti delle funzioni elementari. Integrali immediati. Integrali di tipo logaritmo e di tipo arcotangente. Integrali delle funzioni razionali. Integrazione per sostituzione. Integrazione per parti. Aree di regioni piane. Integrali impropri di funzioni continue e positive definite su intervalli di tipo $[a, +\infty)$ e su intervalli di tipo $(a, b]$ oppure $[a, b)$. *Convergenza degli integrali di tipo* $\int \frac{1}{t^\alpha} dt$ *in un intorno di* 0 *o in un intorno di* $+\infty$. Misura di regioni del piano infinitamente estese. Teorema del confronto per gli integrali impropri. *Teorema del confronto asintotico per gli integrali impropri.*

Successioni numeriche reali

Successioni numeriche reali. Successioni convergenti, divergenti positivamente, divergenti negativamente. Esempi di verifica del limite di una successione. Comportamento definitivo di una successione. Estensione reale di una successione e legame con il limite della successione. Limiti notevoli in termini di successioni. Esempi di applicazione dei teoremi del confronto alle successioni. Fattoriale e limiti di successioni che lo coinvolgono. Successioni crescenti, successioni decrescenti. Limiti di successioni monotone. Calcolo del limite di una funzione in un punto y_0 in termini del limite delle immagini delle successioni convergenti ad y_0. Applicazione alla continuità di una funzione. Esempi di applicazione per la non esistenza di un limite di funzione.

Serie numeriche reali

Cenni storici e motivazione. Serie e successione delle somme parziali n-esime. Serie convergenti, divergenti e indeterminate. Serie di Mengoli. Serie armonica. *Teorema sulla convergenza della serie armonica generalizzata.* Serie geometrica. Condizione necessaria di convergenza per una serie. Operazioni con le serie. Serie a termini positivi. Le serie a termini positivi convergono o divergono positivamente. Criterio del confronto. *Criterio del confronto asintotico. Criterio della radice. Criterio del rapporto.* Serie a termini di segno qualsiasi. Assoluta convergenza di una serie. *L'assoluta convergenza implica la convergenza di una serie.* Serie a segno alterno. *Criterio di Leibnitz.*

Equazioni differenziali

Introduzione alle equazioni differenziali. Equazioni differenziali lineari del primo ordine. *Formula per il calcolo della soluzione generale.* Problemi di Cauchy. Interpretazione geometrica. Equazioni differenziali a variabili separabili. Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti. *La soluzione generale di un'equazione non omogenea è data dalla somma di una soluzione particolare dell'equazione più la soluzione generale dell'equazione omogenea associata.* Risoluzione di un'equazione omogenea. Metodo della somiglianza (o dei coefficienti indeterminati) per il calcolo di una soluzione particolare. Analisi di vari casi. Problemi di Cauchy del secondo ordine.

Libro di testo adottato

Analisi Matematica Uno, A. Cigliola, *La Dotta Editrice*, 2018
Esercizi di Matematica Volume I, Marcellini Sbordone, *Liguori Editrice*