

## Programma del Corso di GEOMETRIA - ING. ELETTRTECNICA - A.A. 2014/15

(Prof. Paolo MAROSCIA)

Numeri naturali, interi, razionali, reali, complessi. Polinomi. Equazioni algebriche. Teorema di Ruffini. Teorema fondamentale dell'algebra e sue conseguenze. Insiemi e sottoinsiemi. Relazioni di equivalenza. Applicazioni tra insiemi. Applicazioni iniettive, suriettive, biettive. Coordinate cartesiane nel piano e nello spazio. Teorema di Pitagora. Elementi di trigonometria e di logica elementare.

Vettori del piano e dello spazio, n-uple ordinate di numeri reali, matrici  $m \times n$ : prime proprietà, operazioni di addizione e di moltiplicazione per un numero reale. Matrici diagonali, triangolari. Matrici simmetriche, antisimmetriche. Matrici circolanti. Sistemi di equazioni lineari. Operazioni elementari sulle righe di una matrice. Matrici equivalenti per righe. Matrici a gradini per righe. Forma a gradini di una matrice. Rango di una matrice espresso mediante i pivot. Matrici quadrate non singolari. Matrice dei coefficienti e matrice completa di un sistema lineare. Il metodo di eliminazione di Gauss. Teorema di Rouché-Capelli e sue conseguenze. Sistemi lineari omogenei. Moltiplicazione righe per colonne di due matrici. Matrici ortogonali. Forma matriciale di un sistema lineare. Sistemi lineari dipendenti da parametri.

Il determinante di una matrice quadrata: definizione e prime proprietà. Teorema di Binet. Matrici invertibili: calcolo della matrice inversa. Matrici diagonalmente dominanti. Teorema di Cramer. Una proprietà notevole dei sistemi lineari omogenei di  $n-1$  equazioni in  $n$  incognite, di rango massimo. Rango per minori; il teorema degli orlati.

Spazi vettoriali reali: definizione e prime proprietà. Esempi. Gli spazi dei vettori geometrici del piano o dello spazio applicati in un punto  $O$ . Combinazioni lineari di vettori. Dipendenza e indipendenza lineare di vettori. Rango per righe e rango per colonne di una matrice. Il teorema del rango. Sottospazi vettoriali. Spazi vettoriali finitamente generati: esistenza di una base, dimensione. Teorema del completamento di una base. Equazioni di un sottospazio di  $\mathbf{R}^n$ . Somma e intersezione di sottospazi. Somma diretta. Formula di Grassmann. Cambiamenti di base e di coordinate.

Applicazioni lineari tra spazi vettoriali: definizione e prime proprietà. Nucleo e immagine. Applicazioni lineari iniettive, suriettive. Teorema di esistenza e unicità per le applicazioni lineari. Teorema della dimensione e sue conseguenze. Endomorfismi di uno spazio vettoriale. Rotazioni e riflessioni del piano. La matrice associata a un endomorfismo rispetto a una base: definizione e prime proprietà. Matrici simili: definizione e prime proprietà. Due matrici  $n \times n$  sono simili se, e solo se, rappresentano uno stesso endomorfismo.

Autovettori e autovalori di un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita o di una matrice quadrata: definizione e prime proprietà. Il polinomio caratteristico di una matrice quadrata o di un endomorfismo. Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico. Calcolo esplicito del polinomio caratteristico. Espressione della traccia e del determinante di una matrice quadrata mediante gli autovalori. Il teorema di Cayley-Hamilton e alcune sue conseguenze. Autospazi. Molteplicità algebrica e molteplicità geometrica di un autovalore. Endomorfismi e matrici diagonalizzabili. Un endomorfismo è diagonalizzabile se, e solo se, ammette una base di autovettori. Altri criteri di diagonalizzabilità.

Il prodotto scalare di due vettori del piano o dello spazio: definizione e prime proprietà. Distanza tra due punti. Il prodotto vettoriale di due vettori dello spazio: definizione e prime proprietà. Area di un parallelogramma e di un triangolo. Il prodotto misto di tre vettori dello spazio: definizione e prime proprietà. Il volume di un parallelepipedo.

Il prodotto scalare standard in  $\mathbf{R}^n$ : definizione e prime proprietà. Norma di un vettore. Vettori ortogonali. Insiemi ortogonali e insiemi ortonormali di vettori. Ortogonalità e indipendenza lineare di vettori. Disuguaglianza di Cauchy. L'angolo formato da due vettori non nulli. Basi ortonormali. Metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt. Matrici ortogonali e basi ortonormali. Basi ortonormali di autovettori. Una matrice reale  $n \times n$  ammette una base ortonormale di autovettori se, e solo se, è simmetrica.

**Geometrica analitica del piano:** Equazioni parametriche ed equazione cartesiana di una retta. Condizione di allineamento di tre punti del piano. Comportamento di due rette del piano. Condizioni di parallelismo e di perpendicolarità tra rette. Asse di un segmento. Fasci di rette. Condizione affinché tre rette distinte appartengano a uno stesso fascio. Distanza di un punto da una retta. Distanza tra due rette parallele. Equazione cartesiana di una circonferenza. Rette tangenti a una circonferenza.

**Geometria analitica dello spazio:** Equazione cartesiana di un piano. Condizione di complanarità di quattro punti dello spazio. Comportamento di due piani dello spazio. Condizioni di parallelismo e di perpendicolarità tra piani. Fasci di piani. Condizione affinché tre piani distinti appartengano a uno stesso fascio. Equazioni cartesiane ed equazioni parametriche di una retta dello spazio. Parametri direttori di una retta. Condizioni di parallelismo e di perpendicolarità tra rette. Vettori perpendicolari a un piano. Condizioni di parallelismo e di perpendicolarità tra una retta e un piano. Rette complanari. Condizione di perpendicolarità tra (le direzioni di) due rette. Distanza di un punto da una retta e da un piano. Distanza tra due rette parallele e tra due piani paralleli. Il piano passante per un punto e parallelo a due rette non parallele tra loro. I piani paralleli contenenti due rette sghembe. La retta perpendicolare e incidente a due rette sghembe. Distanza tra due rette sghembe. Caratterizzazione di due rette sghembe rappresentate da equazioni cartesiane. Sfere dello spazio. Rette tangenti e piani tangenti a una sfera.

### Testi di riferimento

P. MAROSCIA, *Introduzione alla Geometria e all'Algebra lineare*, Zanichelli, 2000

P. MAROSCIA, *Geometria e algebra lineare*, Zanichelli, 2002

P. MAROSCIA, *Materiale didattico relativo al Corso*, 2014

### Norme di esame

A) Sono previsti per l'A.A. 2014/15 i seguenti appelli, con le **date della prova scritta** qui indicate:

- I e II Appello: **26 Gennaio e 23 Febbraio 2015**
- I e II Appello di recupero: **23 Giugno e 20 Luglio 2015**
- III Appello di recupero: **22 Settembre 2015**

Per sostenere l'esame, è **necessario** prenotarsi, in tempo utile, sul sito **INFOSTUD** della "Sapienza": **solo gli studenti prenotati sul sito potranno essere ammessi alla prova scritta**. E' consentito allo studente di presentarsi a più appelli.

B) L'esame consiste di **una prova scritta**, della durata di tre ore, e di **una prova orale**. Per l'ammissione all'orale è necessario aver riportato, nella prova scritta, una votazione di **almeno 15/30**. All'inizio della prova scritta, lo studente riceverà dei fogli con i testi dei problemi da risolvere, che dovrà riconsegnare alla fine, *scrivendo in modo chiaro e leggibile le risposte e spiegando il procedimento seguito*, e utilizzando **soltanto** gli spazi a disposizione sui fogli ricevuti; **non** saranno accettati altri fogli.

C) Lo studente deve presentarsi alle prove di esame munito di un documento valido con fotografia.

D) Durante la prova scritta non è consentito usare libri, dispense, appunti, calcolatrici o cellulari, né comunicare con altri candidati, pena l'annullamento della prova; inoltre non è consentito uscire dall'aula.

E) I risultati della prova scritta, l'elenco dei candidati ammessi all'orale e il calendario degli esami orali saranno resi noti *sulla pagina di INFOSTUD riguardante l'appello*, nei giorni successivi alla prova stessa.