Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica – A.A. 2016-2017
Programma del corso di GE210-Geometria 2
Prof. A. Verra

Geometria affine

Richiami sugli spazi affini. Isomorfismi affini tra spazi affini. Affinità di uno spazio affine. Relazione di equivalenza indotta dall'isomorfismo affine. Esistenza ed unicità dell'affinità definita a partire da un automorfismo dello spazio vettoriale di sostegno e dall'immagine di un qualsiasi punto. Le affinità di $\mathbb{A}^n(K)$ hanno equazioni del tipo $f(x) = Ax+b$ dove $A \in GL_n(K)$ e $b \in K^n$. Le affinità trasformano sottospazi affini in sottospazi affini. La dimensione di un sottospazio è un invariante affine. Le affinità trasformano sottospazi affini paralleli in sottospazi affini paralleli. Punti indipendenti in uno spazio affine. Esiste ed è unica l'affinità che manda una $n+1$-pla di punti indipendenti in una $n+1$-pla di punti indipendenti. I triangoli sono affinemente equivalenti. I parallelogrammi sono affinemente equivalenti. Classificazione delle coniche affini.

Algebra bilineare

Forme bilineari reali. Forme bilineari simmetriche, antisimmetriche e alterne. Prodotti scalari di vettori geometrici. Matrice di Gram associata ad una forma bilineare rispetto a una base. Formula del cambiamento della matrice associata ad una forma bilineare al variare della base considerata: due matrici sono associate alla stessa forma bilineare se e solo se sono congruenti. Il rango, la simmetria e l'antisimmetria di una forma bilineare sono invarianti per congruenza. Teorema di esistenza di basi diagonalizzanti. Vettori ortogonali. Spazio ortogonale a un sottoinsieme. Equazioni di un sottospazio ortogonale. Vettori isotropi. Cono isotropo. Descrizione del cono isotropo in dimensione 2 per uno spazio vettoriale reale. Radicale di uno spazio vettoriale e cono isotropo: relazioni tra essi. Esistenza di vettori non isotropi se la forma è non nulla. Decomposizione di uno spazio vettoriale nella somma diretta della retta vettoriale generata da un vettore non isotropo con il sottospazio a questa ortogonale. Dato W sottospazio di V formato da vettori non nulli non isotropi, allora $V = W \oplus W^{\perp}$. Rango di una forma bilineare. Esempi di diagonalizzazione per induzione di forme bilineari simmetriche di rango massimo e non. Forma quadratica associata ad una forma bilineare simmetrica. Corrispondenza biunivoca tra forme bilineari simmetriche e forme quadratiche. Fissata una base, la forma quadratica si rappresenta con un polinomio omogeneo di secondo grado. Su un campo algebricamente chiuso una forma si può scrivere come somma di quadrati delle incognite rispetto a una opportuna base diagonalizzante. Riduzione a forma canonica di una forma bilineare simmetrica su un campo algebricamente chiuso. Riduzione a forma canonica di una forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}$. Legge di inerzia di Sylvester.

Spazi vettoriali euclidei

Prodotti scalari. Prodotto scalare standard. Diseguaglianza di Cauchy-Schwarz. Disuguaglianza triangolare. Teorema di Pitagora. Teorema di Carnot. Norma indotta da un prodotto scalare. Basi ortogonali. Basi ortonormali. Teorema di Gram-Schmidt. Una forma bilineare simmetrica è un prodotto scalare se e solo se la serie dei minori principali di una qualsiasi matrice associata alla forma è costituita da numeri strettamente positivi. Basi ortogonali e ortonormali. La matrice di passagggio da una base ortonormale ad un'altra ortonormale è ortogonale. Viceversa: trasformando una base ortonormale con una matrice ortogonale si ottiene una nuova base ortonormale. Vettori non nulli a due a due ortogonali rispetto ad un prodotto scalare sono linearmente indipendenti. Caratterizzazione degli operatori unitari. Proprietà degli operatori unitari: autovalori e ortogonalità della matrice associata rispetto ad una base ortonormale. Operatori aggiunti. Operatori simmetrici. Teorema spettrale. Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile rispetto ad una base ortonormale di autovettori. Correzione della prima prova di esonero. Prodotto vettoriale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Proprietà del prodotto vettoriale.

Geometria euclidea

Matrici ortogonali reali quadrate di ordine due: interpretazione geometrica. Matrici di rotazione di centro l' origine nel piano euclideo reale. Gli operatori unitari di ordine 2 inducono rotazioni o riflessioni nel piano euclideo. Classificazione degli operatori ortogonali di $\mathbb{R}^2$. Isometrie. Caratterizzazione: le isometrie sono tutte e sole le affinità associate ad un operatore unitario. Simmetrie. Determinazione dell'asse di simmetria dei ribaltamenti di $\mathbb{R}^2$. Il gruppo delle isometrie del piano. Simmetria assiale (riflessione ortogonale) rispetto ad una retta data. Interpretazione ed utilità geometrica del prodotto vettoriale. Area del parallelogramma costruito su due vettori. Area del triangolo individuato da tre punti. Interpretazione geometrica dei coefficienti di Fourier. Angolo tra vettori in uno spazio vettoriale euclideo. Versori normali ad una retta del piano. Angolo convesso tra rette nel piano cartesiano (indeterminazione dovuta al segno dei versori). Base del piano definita a partire da una retta. Distanza tra un punto e una retta nel piano. Vettori e versori ortogonali ad un piano nello spazio euclideo tridimensionale. Significato geometrico dei parametri di giacitura di un piano nello spazio. Rette ortogonali ad un piano. Distanze nello spazio. Perpendicolare comune e minima distanza di due rette sghembe. Simmetria assiale rispetto ad una retta nel piano. Teorema di invarianza. Teorema di riduzione. Teorema di classificazione delle coniche euclidee. Grafici di coniche euclidee. Coniche a centro e non.

Geometria proiettiva

Definizione di spazio proiettivo come insieme delle rette vettoriali di uno spazio vettoriale. Dimensione di uno spazio proiettivo. Definizione di Grassmaniana. Lo spazio proiettivo è in corrispondenza biunivoca con l' insieme dei vettori non nulli identificati a meno di costanti moltiplicative non nulle. Lo spazio proiettivo numerico standard. Il piano proiettivo reale. Riferimento proiettivo e sistemi di coordinate omogenee. Equazioni in coordinate proiettive e polinomi omogenei. Rette nel piano proiettivo. Rette fondamentali del piano proiettivo. Retta proiettiva passante per due punti distinti. Piano proiettivo passante per tre punti non allineati. Due rette nel piano proiettivo non hanno mai intersezione vuota. Due piani o una retta ed un piano nello spazio proiettivo tridimensionale hanno intersezione mai vuota. Rette sghembe nello spazio proiettivo. Date due rette sghembe ed un punto fuori di esse, esiste una retta passante per il punto ed incidente le due rette date. Costruzione di Desargues della retta proiettiva. Punto improprio all'infinito. Rette parallele nel piano affine hanno il punto imprchoorpio (la loro direzione) in comune. Spazi proiettivi come estensioni di spazi affini. Omogenizzazione di coordinate affini e deomogenizzazione di coordinate proiettive. Punti impropri e punti propri dello spazio proiettivo. Modelli del piano proiettivo reale: disco e sfera con identificazione antipodale. Interpretazione geometrica sul modello dato delle proprietà del piano proiettivo reale. Chiusura proiettiva di enti affini. Scheletro affine di enti proiettivi. Proiettività e cambiamenti di coordinate omogenee. Curve piane e coniche nel piano proiettivo. Trasformazione di una conica sotto l'azione di una proiettività. Coniche proiettivamente equivalenti. Forme canoniche delle coniche nel piano proiettivo reale: classificazione per rango e segnatura. Regola dei segni di Harriot-Descartes. Forme canoniche delle coniche nel piano proiettivo complesso. Le coniche affini reali non singolari corrispondono alla stessa conica proiettiva generale reale.

Curve algebriche piane

Richiami sui polinomi. Polinomi omogenei in tre indeterminate. Omogenizzazione e deomogenizzazione. Derivate parziali. Gradiente. Curve algebriche piane affini e proiettive. Chiusura proiettiva di una curva affine e parte affine di una curva proiettiva. Molteplicità di intersezione di una curva e di una retta in un punto. Molteplicità di una curva in un punto. Punti regolari e punti singolari. Un punto è regolare se e solo se è semplice. Teorema della retta tangente in un punto regolare. Tangenti principali in un punto singolare (e non). Asintoti di una curva. Cuspidi all'infinito. Configurazione dei rami di una curva nei punti all'infinito. Grafici di curve piane. Equazione in forma di Weierstrass di una curva cubica del piano proiettivo reale. Struttura di gruppo abeliano su una curva cubica proiettiva non singolare del piano reale.