Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica – A.A. 2014-2015
Programma del corso di GE210-Geometria 2
Prof. A. Verra

Geometria affine

Richiami sugli spazi affini. Isomorfismi affini tra spazi affini. Affinità di uno spazio affine. Relazione di equivalenza indotta dall'isomorfismo affine. Ogni spazio affine di dimensione n su un campo K è isomorfo a $\mathbb{A}^n(K)$. Due spazi affini della stessa dimensione su uno stesso campo sono isomorfi. Esistenza ed unicità dell'affinità definita a partire da un automorfismo dello spazio vettoriale di sostegno e dall'immagine di un qualsiasi punto. Le affinità di $\mathbb{A}^n(K)$ hanno equazioni del tipo $f(x) = Ax + b$ dove $A \in GL_n(K)$ e $b \in K^n$. Le affinità trasformano sottospazi affini in sottospazi affini. La dimensione di un sottospazio è un invariante affine. Le affinità trasformano sottospazi affini paralleli in sottospazi affini paralleli. Punti indipendenti in uno spazio affine. Esiste ed è unica l'affinità che manda una $n + 1$-pla di punti indipendenti in una $n + 1$-pla di punti indipendenti. I triangoli sono affinemente equivalenti. I parallelogrammi sono affinemente equivalenti. Classificazione delle coniche affini.

Algebra bilineare

Forme bilineari. Forme bilineari simmetriche, antisimmetriche e alterne. In caratteristica diversa da due le forme alterne sono tutte e sole le antisimmetriche. Prodotti scalari di vettori geometrici. Matrice di Gram associata ad una forma bilineare rispetto a una base. Formula del cambiamento della matrice associata ad una forma bilineare al variare della base considerata: due matrici sono associate alla stessa forma bilineare se e solo se sono congruenti. Il rango, la simmetria e l'antisimmetria di una forma bilineare sono invarianti per congruenza. Condizione necessaria per la diagonalizzabilità di una forma bilineare. Teorema di esistenza di basi diagonalizzanti. Vettori ortogonali. Spazio ortogonale a un sottoinsieme. Equazioni di un sottospazio ortogonale. Vettori isotropi. Cono isotropo. Descrizione del cono isotropo in dimensione 2 per uno spazio vettoriale reale. Il cono isotropo è un cono quadrico. Radicale di uno spazio vettoriale e cono isotropo: relazioni tra essi. Esistenza in caratteristica diversa da 2 di vettori non isotropi se la forma è non nulla. Decomposizione di uno spazio vettoriale nella somma diretta della retta vettoriale generata da un vettore non isotropo con il sottospazio a questa ortogonale. Dato W sottospazio di V formato da vettori non nulli non isotropi, allora $V = W \oplus W^{\perp}$. Rango di una forma bilineare. Esempi di diagonalizzazione per induzione di forme bilineari simmetriche di rango massimo e non. Diagonalizzazione di forme bilineari simmetriche con l'algoritmo di Lagrange. Diagonalizzazione di forme quadratiche con il metodo del completamento del quadrato. Forma quadratica associata ad una forma bilineare simmetrica. Corrispondenza biunivoca tra forme bilineari simmetriche e forme quadratiche. Fissata una base, la forma quadratica si rappresenta con un polinomio omogeneo di secondo grado. Su un campo algebricamente chiuso una forma si può scrivere come somma di quadrati delle incognite rispetto a una opportuna base diagonalizzante. Riduzione a forma canonica di una forma bilineare simmetrica su un campo algebricamente chiuso. Riduzione a forma canonica di una forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}$. Legge di inerzia di Sylvester.

Spazi vettoriali euclidei

Prodotti scalari. Prodotto scalare standard. Diseguaglianza di Cauchy-Schwarz. Disuguaglianza triangolare. Teorema di Pitagora. Teorema di Carnot. Norma indotta da un prodotto scalare. Basi ortogonali. Basi ortonormali. Teorema di Gram-Schmidt. Una forma bilineare simmetrica è un prodotto scalare se e solo se la serie dei minori principali di una qualsiasi matrice associata alla forma è costituita da numeri strettamente positivi. Basi ortogonali e ortonormali. La matrice di passagggio da una base ortonormale ad un'altra ortonormale è ortogonale. Viceversa: trasformando una base ortonormale con una matrice ortogonale si ottiene una nuova base ortonormale. Vettori non nulli a due a due ortogonali rispetto ad un prodotto scalare sono linearmente indipendenti. Caratterizzazione degli operatori unitari. Proprietà degli operatori unitari: autovalori e ortogonalità della matrice associata rispetto ad una base ortonormale. Operatori aggiunti. Operatori simmetrici. Teorema spettrale. Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile rispetto ad una base ortonormale di autovettori. Correzione della prima prova di esonero. Prodotto vettoriale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Proprietà del prodotto vettoriale.

Geometria euclidea

Matrici ortogonali reali quadrate di ordine due: interpretazione geometrica. Matrici di rotazione di centro l' origine nel piano euclideo reale. Gli operatori unitari di ordine 2 inducono rotazioni o riflessioni nel piano euclideo. Classificazione degli operatori ortogonali di $\mathbb{R}^2$. Isometrie. Caratterizzazione: le isometrie sono tutte e sole le affinità associate ad un operatore unitario. Simmetrie. Determinazione dell'asse di simmetria dei ribaltamenti di $\mathbb{R}^2$. Il gruppo delle isometrie del piano. Stabilizzatori e orbite sotto l'azione di gruppi di isometrie. I gruppi diedrali. Riflessione associata ad un vettore. Simmetria assiale (riflessione ortogonale) rispetto ad una retta data. La composizione di due ribaltamenti genera una rotazione. Interpretazione ed utilità geometrica del prodotto vettoriale. Area del parallelogramma costruito su due vettori. Area del triangolo individuato da tre punti. Interpretazione geometrica dei coefficienti di Fourier. Angolo tra vettori in uno spazio vettoriale euclideo. Versori normali ad una retta del piano. Angolo convesso tra rette nel piano cartesiano (indeterminazione dovuta al segno dei versori). Base del piano definita a partire da una retta. Distanza tra un punto e una retta nel piano. Vettori e versori ortogonali ad un piano nello spazio euclideo tridimensionale. Significato geometrico dei parametri di giacitura di un piano nello spazio. Rette ortogonali ad un piano. Distanza di un punto da un piano. Perpendicolare comune e minima distanza di due rette sghembe. Simmetria assiale rispetto ad una retta nel piano. Teorema di invarianza. Teorema di riduzione. Teorema di classificazione delle coniche euclidee. Grafici di coniche euclidee. Coniche a centro e non. Le coniche a centro sono necessariamente di tipo ellittico o iperbolico ed hanno due assi di simmetria. Le coniche senza centro sono di tipo parabolico con un solo asse di simmetria. Se una conica $\mathscr{C}$ è a centro, allora il suo centro ha coordinate $C = \left(\frac{\mathscr{A}_{01}}{\det Q}, \frac{\mathscr{A}_{01}}{\det Q}\right)$ e i suoi assi di simmetria sono orientati come gli autospazi della matrice Q. Se una conica non ha centro, allora il suo asse di simmetria è parallelo all'autospazio $E(0)$, inoltre, se la conica è una parabola non degenere, allora il vertice della parabola è dato dall'intersezione tra la conica e la retta parallela all'autospazio associato all'autovalore non nullo di Q tangente a $\mathscr{C}$.

Geometria proiettiva

Definizione di spazio proiettivo come insieme delle rette vettoriali di uno spazio vettoriale. Dimensione di uno spazio proiettivo. Definizione di Grassmaniana. Lo spazio proiettivo è in corrispondenza biunivoca con l' insieme dei vettori non nulli identificati a meno di costanti moltiplicative non nulle. Lo spazio proiettivo numerico standard. Il piano proiettivo reale. Riferimento proiettivo e sistemi di coordinate omogenee. Equazioni in coordinate proiettive e polinomi omogenei. Iperpiani di uno spazio proiettivo. Rette nel piano proiettivo. Piani in uno spazio proiettivo tridimensionale. Rette fondamentali del piano proiettivo. Sottospazi proiettivi. Retta proiettiva passante per due punti distinti. Piano proiettivo passante per tre punti non allineati. Due rette nel piano proiettivo non hanno mai intersezione vuota. Due piani o una retta ed un piano nello spazio proiettivo tridimensionale hanno intersezione mai vuota. Rette sghembe nello spazio proiettivo. Date due rette sghembe ed un punto fuori di esse, esiste una retta passante per il punto ed incidente le due rette date. Costruzione di Desargues della retta proiettiva. Punto improprio all'infinito. Rette parallele nel piano affine hanno il punto improrpio (la loro direzione) in comune. Spazi proiettivi come estensioni di spazi affini. Omogenizzazione di coordinate affini e deomogenizzazione di coordinate proiettive. Punti impropri e punti propri dello spazio proiettivo. Modello del piano proiettivo reale: sfera bidimensionale con identificazione antipodale. Interpretazione geometrica sul modello dato delle proprietà del piano proiettivo reale. Chiusura proiettiva di enti affini. Scheletro affine di enti proiettivi. Riferimenti proiettivi. Proiettività. Punti linearmente indipendenti. Punti in posizione generale. Teorema fondamentale delle proiettività. Punti fissi. Esempi di luoghi geometrici definiti da equazioni polinomiali omogenee. Curve piane e coniche nel piano proiettivo. Trasformazione di una conica sotto l'azione di una proiettività. Coniche proiettivamente equivalenti. Forme canoniche delle coniche nel piano proiettivo reale: classificazione per rango e segnatura. Regola dei segni di Harriot-Descartes. Forme canoniche delle coniche nel piano proiettivo complesso. Le coniche affini reali non singolari corrispondono alla stessa conica proiettiva generale reale.