Università degli Studi Roma Tre – Corso di laurea in Matematica
GE210-Geometria 2 – A.A. 2015-2016 – PRIMO ESONERO

ESERCIZIO 1. Sia $\{u,\ v,\ w\}$ una base ortonormale dello spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^3,\ \cdot)$, dotato del prodotto scalare standard. Giustificando esaurientemente la risposta, calcolare la dimensione dei sottospazi generati da:

(a) $\{\, u,\quad v,\quad (u \wedge v \cdot w)w \,\}$;

(b) $\{\, u,\quad v,\quad (u+v) \wedge (u-v) \,\}$;

(c) $\{\, u,\quad u+v,\quad u \wedge (u+v) \,\}$;

(d) $\{\, u+(u \wedge v),\quad v+(u \wedge v),\quad u-v \,\}$;

(e) $\{\, (u \cdot v)w,\quad ((v \wedge u) \cdot w)w,\quad u \wedge (v \wedge w) \,\}$;

(f) $\{\, u,\quad u \wedge v,\quad (u \wedge v) \wedge w \,\}$.

ESERCIZIO 2. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 2 e sia $\mathcal{B} = \{ v_1, v_2 \}$ una sua base. Siano date poi le matrici A e B, quadrate e invertibili di ordine 2, con $\det A < 0$.

Siano Q la forma quadratica su V che ha A come matrice associata rispetto a $\mathcal{B}$ ed F l'automorfismo di V che ha B come matrice associata rispetto alla stessa base.

Si definisca l'applicazione $Q' : V \to \mathbb{R}$ come

$$Q'(v) \stackrel{\text{def}}{=} Q(F(v)), \qquad \text{per ogni } \; v \in V.$$

(a) Provare che Q' è una forma quadratica non degenere su V.

(b) Dire se Q' ammette vettori isotropi non banali.

ESERCIZIO 3. Si consideri la forma quadratica Q su $\mathbb{R}^4$, definita come

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2kx_2x_3 + x_3^2 + 2(k-1)x_1x_4,$$

al variare del parametro reale k.

(a) Diagonalizzare Q al variare di k.

(b) Trovare la segnatura e il rango di Q, al variare di k.

(c) Per quali valori di k il sottospazio ortogonale di $U = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 + x_4 = x_3 = 0 \right\}$ ha dimensione 2?

(d) Al variare di k, determinare i vettori isotropi contenuti nel sottospazio $V = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 = 0 \right\}$.

(e) Al variare di k, determinare un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di dimensione massima possibile che non contiene vettori isotropi.

ESERCIZIO 4. Siano dati nel piano affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ le rette

$$r_1 : \ y = x \qquad\qquad r_2 : \ x + y - 2 = 0 \qquad\qquad r_3 : \ y = 2$$

e il punto $A(1,2)$. Dire se esiste (e trovarla in caso positivo) una affinità f del piano tale che

$$f(r_1) = r_2 \qquad\qquad f(r_2) = r_1 \qquad\qquad f(r_3) = r_3 \qquad\qquad f(A) = A.$$

ESERCIZIO 5. Si consideri l'affinità

$$f: \begin{cases} x' = \frac{1}{5}(3x + 4y + 4) \\ y' = \frac{1}{5}(4x - 3y - 8) \end{cases}$$

(a) Provare che f è una isometria e la si classifichi, specificando punti e rette fisse.

(b) Detta g la traslazione di vettore $v = (2, 1)$, stabilire se $f \circ g = g \circ f$.

(c) Classificare $g \circ f$ e determinarne punti e rette fisse.

ESERCIZIO 6. Determinare una base ortonormale di

$$W = \mathcal{L}((1,1,0,0),\ (1,2,1,0),\ (1,0,0,-1),\ (1,3,1,1))$$

rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$.