Università degli Studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica
GE210-Geometria 2 – A.A. 2015-2016
PRIMO ESONERO

Esercizio 1. Sia $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una forma bilineare antisimmetrica non nulla.

(a) Provare che il rango di B è minore di tre.

(b) Provare che per ogni $v \in \mathbb{R}^3$, si ha che $B(v,v) = 0$.

(c) Dimostrare che esiste una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto a cui la matrice di B è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Sia $h \in \mathbb{R}$. Si consideri la forma bilineare simmetrica B su $\mathbb{R}^4$ associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & h & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & h+1 \\ 0 & -2 & h+1 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

(a) Per quali valori di h la forma B è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$?

(b) In corrispondenza dei valori di h per cui B ha rango 3, calcolare la segnatura di B esplicitando la base diagonalizzante usata.

(c) Stabilire se esistono un valore di h ed una base di $\mathbb{R}^4$ per cui la matrice di B sia

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale euclideo e siano U e W sottospazi di V. Provare che

$$U^\perp \cap W^\perp = (U \cap W)^\perp \iff U = W.$$

Esercizio 4. Considerare la forma quadratica Q su $\mathbb{R}^4$ definita da

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = -\frac{1}{2}x_1^2 - x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2 + x_1x_2 - x_2x_4.$$

(a) Determinare il rango di Q.

(b) Determinare, se esiste, un vettore isotropo per Q.

(c) Determinare il complemento ortogonale rispetto a Q del sottospazio

$$W = \mathcal{L}((1,1,0,1),(1,-1,0,0),(0,0,1,0))$$

e decidere se $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$.

Esercizio 5. Nel piano euclideo, si consideri la retta $r:\ x+2y+1=0$.

(a) Determinare la retta perpendicolare ad r passante per $P(1,1)$.

(b) Determinare sulla retta $s:\ x+y+1=0$ un punto Q di ascissa positiva che disti $\sqrt{2}$ da r.

(c) Determinare sulla retta $t:\ x+y+2=0$ un punto A tale che il triangolo APQ abbia area 1.

Esercizio 6. Siano dati nel piano affine le rette

$$r:\ y=0 \qquad\qquad s:\ x-y=0$$

e i punti

$$A_1(1,-1) \qquad A_2(1,1) \qquad B_1(1,0) \qquad B_2(0,-1).$$

Argomentando esaurientemente la risposta, dire se esiste (e trovarla in caso positivo) una affinità f del piano tale che

$$f(A_1)=B_1 \qquad f(A_2)=B_2 \qquad f(r)=s.$$