Parte 12b. Riduzione a forma canonica

A. Savo $-$ Appunti del Corso di Geometria 2012-13

Indice delle sezioni

1 Coniche

Chiameremo *conica* un'equazione di secondo grado in x, y, quindi del tipo:

$$\mathcal{C}: a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \tag{1}$$

La matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

è detta *matrice della conica.* Notiamo che:

- a_{11} e a_{22} sono, rispettivamente, i coefficienti di x^2 e y^2, e a_{12} è il coefficiente di xy diviso 2. a_{33} è il termine noto, e a_{13}, a_{23} sono, rispettivamente, il coefficiente di x (risp. di y) diviso 2.

L'equazione (1) si scrive, in forma matriciale

$$(x, y, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \tag{2}$$

La sottomatrice di ordine due

$$Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

corrispondente alla forma quadratica dei termini di secondo grado, è detta *parte principale* di A. Assumeremo $Q \neq O$ (altrimenti $\mathcal{C}$ è un'equazione di primo grado).

Fissato un riferimento cartesiano $(O; x, y)$ le soluzioni di (1) rappresentano un insieme di punti del piano (detto *grafico* della conica).

Esempio Consideriamo la conica

$$\mathcal{C} : 4x^2 - 4xy + y^2 + 8x - 4y + 3 = 0.$$

La sua matrice è $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, con parte principale $Q = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Notiamo che:

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 8x - 4y + 3 = (2x - y + 1)(2x - y + 3)$$

Dunque l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{C}$ è dato dall'unione delle due rette parallele:

$$2x - y + 1 = 0, \quad 2x - y + 3 = 0.$$

Esempio La conica

$$\mathcal{C} : 2x^2 - 3y^2 - 4 = 0$$

ha matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, entrambe diagonali. Dividendo per 4 ambo i membri:

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{\frac{4}{3}} = 1,$$

si vede che $\mathcal{C}$ rappresenta un'iperbole.

Esempio La conica

$$\mathcal{C} : 2x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x - 2y - 1 = 0,$$

ha matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. In questo caso è più difficile determinare il grafico dell'equazione.

1.1 Forme speciali

Diamo ora un elenco di forme speciali in cui si presenta l'equazione di una conica, per le quali è facile determinare la geometria delle soluzioni. Vedremo poi che questo elenco, a meno di un opportuno cambiamento di riferimento, descrive tutti i casi possibili. Per evidenziare questi casi speciali converrà scrivere le incognite in maiuscolo: X, Y, e in tal caso il grafico sarà disegnato nel piano con coordinate X, Y.

1. Ellisse reale.

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1,$$

che già conosciamo.

2. Ellisse immaginaria.

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1,$$

Questa conica non ha soluzioni (dunque, rappresenta l'insieme vuoto).

3. Ellisse degenere.

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0,$$

Questa conica si riduce alla sola origine.

4. Iperbole.

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

5. Iperbole degenere.

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0,$$

Poichè:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = \Big(\frac{X}{a} + \frac{Y}{b}\Big)\Big(\frac{X}{a} - \frac{Y}{b}\Big)$$

questa conica è l'unione delle due rette

$$bX + aY = 0, \quad bX - aY = 0.$$

6. Parabola.

$$Y^2 = 2pX,$$

con $p \neq 0$.

7. Coppia di rette parallele.

$$Y^2 = h^2,$$

con $h \neq 0$. Questa conica rappresenta l'unione delle due rette parallele $Y - h = 0$ e $Y + h = 0$.

8. Coppia di rette coincidenti.

$$Y^2 = 0.$$

9. Coppia di rette parallele immaginarie.

$$Y^2 = -k^2,$$

con $k \neq 0$. Anche questa conica non ha soluzioni reali.

Le coniche 7, 8, 9 si chiamano anche *parabole degeneri*.

Nella Sezione 5 dimostreremo il seguente

Teorema *Sia $\mathcal{C}$ una conica di equazione* (1). *Allora esiste sempre un riferimento* $(O'; X, Y)$ *nel quale l'equazione di $\mathcal{C}$ assume una delle forme* $1, \dots, 9$.

Ne segue che l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{C}$ è uno dei seguenti: l'insieme vuoto, un punto, un'ellisse, un'iperbole, una parabola, o una coppia di rette (eventualmente coincidenti).

2 Esempio di riduzione

In questo esempio vogliamo dimostrare che, con un opportuno cambiamento di coordinate, l'equazione della conica assume una forma più semplice.

Esempio Consideriamo la conica

$$\mathcal{C} : 2x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x - 2y - 1 = 0,$$

con matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Primo passo. Diagonalizziamo la forma quadratica del gruppo omogeneo di secondo grado:

$$q = 2x^2 + 2y^2 + 2xy$$

la cui matrice è Q. Gli autovalori di Q sono $\lambda = 1$ e $\mu = 3$ e gli autospazi sono

$$E(\lambda) : x + y = 0, \quad E(\mu) = x - y = 0.$$

Dunque risulta $D = M^t Q M$ con

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ponendo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y') \end{cases}$$

si ha:

$$2x^2 + 2y^2 + 2xy = {x'}^2 + 3{y'}^2,$$

e l'equazione di $\mathcal{C}$ diventa:

$$ {x'}^2 + 3{y'}^2 + 2\sqrt{2}x' - 1 = 0. \tag{3}$$

Con un'opportuna trasformazione ortogonale (la rotazione di $-\pi/4$ corrispondente alla matrice M), abbiamo cosi' eliminato il termine misto.

Secondo passo. Completiamo i quadrati. Possiamo scrivere:

$$ {x'}^2 + 2\sqrt{2}x' = (x' + \sqrt{2})^2 - 2.$$

Poniamo

$$\begin{cases} X = x' + \sqrt{2} \\ Y = y' \end{cases}$$

che corrisponde a una traslazione. L'equazione (3) diventa:

$$X^2 + 3Y^2 - 3 = 0,$$

detta *forma canonica* di $\mathcal{C}$. Questa si riscrive

$$\frac{X^2}{3} + \frac{Y^2}{1} = 1,$$

e quindi $\mathcal{C}$ rappresenta un ellisse, con semiassi $a = \sqrt{3}$ e $b = 1$.

Inoltre, si verifica che le coordinate dell'origine O' del nuovo riferimento $\mathcal{R}' = (O'; X, Y)$ (che chiameremo *riferimento canonico* di $\mathcal{C}$) sono $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dunque $O' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è il centro di simmetria dell'ellisse.

Infine, gli assi di simmetria dell'ellisse sono, rispettivamente, l'asse X e l'asse Y. Questi assi sono paralleli agli autospazi di Q, e hanno equazione:

$$\text{asse}\, X : x + y = 0, \quad \text{asse}\, Y : x - y + 2 = 0.$$

La conica ha il grafico come in figura.

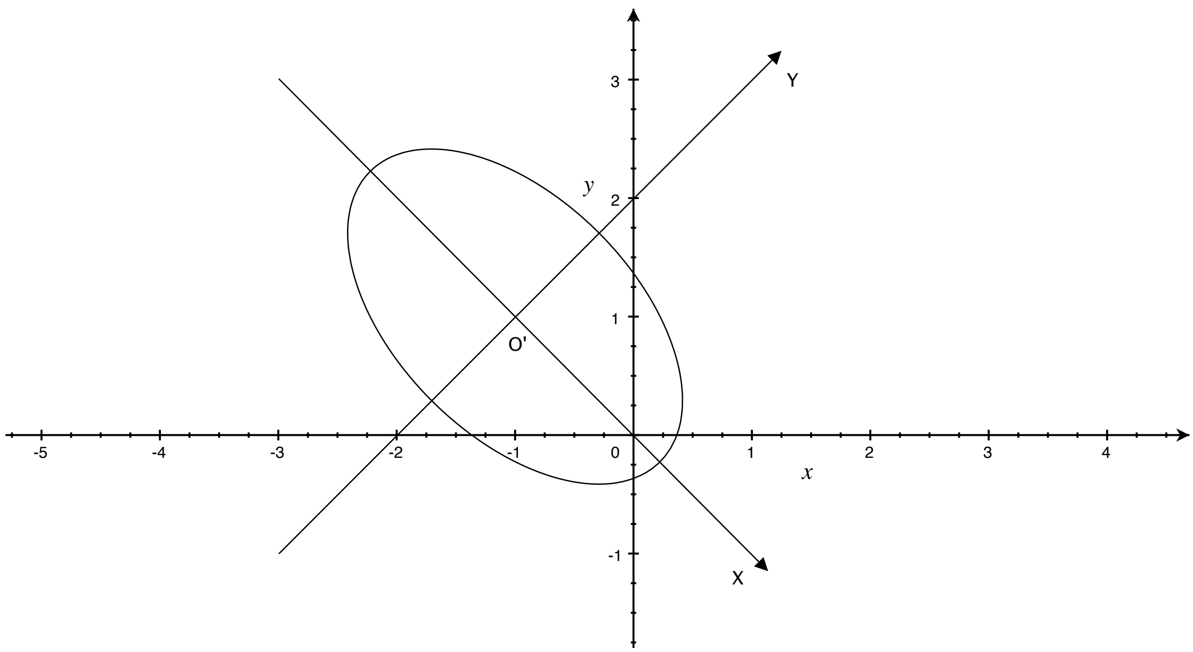

Figura 1: Riferimento canonico $(O'; X, Y)$ della conica (ellisse) $2x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x - 2y - 1 = 0$. Equazione nel riferimento canonico $X^2 + 3Y^2 = 3$.

3 Teoremi fondamentali

3.1 Teorema di invarianza

Esaminiamo ora come cambia l'equazione di una conica se si cambiano le coordinate. Sia dunque $\mathcal{R} = (O; x, y)$ il riferimento di partenza e sia $\mathcal{R}' = (O'; x', y')$ un secondo riferimento cartesiano. Allora l'equazione (1) di $\mathcal{C}$ si trasforma in un'equazione in x', y', sempre di secondo grado, che in forma matriciale si scriverà:

$$(x', y', 1)A' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

e la matrice della conica nel riferimento $\mathcal{R}'$ sarà A'. Nell'appendice vedremo che la relazione tra A e A' è:

$$A' = T^t A T,$$

dove T è la matrice 3×3 che descrive il cambiamento di coordinate inverso da $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$. Poiché $\det T = \pm 1$, questo implica il seguente fatto importante, dimostrato in Appendice.

Teorema di invarianza *Il determinante della matrice di una conica non cambia nel passaggio da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$:*

$$\det A = \det A'.$$

Si ha inoltre:

$$\mathrm{rk} A = \mathrm{rk} A', \quad \det Q = \det Q', \quad \mathrm{tr} Q = \mathrm{tr} Q'.$$

Diremo anche che il determinante di A è *invariante* per cambiamenti di coordinate. Altri invarianti sono quindi: il rango di A, il determinante e la traccia della parte principale Q.

3.2 Teorema di riduzione

Il teorema che segue (dimostrato in Appendice) mostra che esiste sempre un riferimento cartesiano in cui l'equazione della conica assume una forma particolarmente semplice, detta *forma canonica*, che ci permetterà di individuarne il suo grafico. Sia dunque $\mathcal{C}$ una conica, e sia Q la parte principale della sua matrice. Indichiamo con λ e μ gli autovalori di Q. Poiché $|Q| = \lambda\mu$ si avrà che:

- $|Q| \neq 0$ se e solo se λ e μ sono entrambi non nulli.
- $|Q| = 0$ se e solo se uno dei due autovalori è nullo. Adotteremo in tal caso la convenzione che sia il primo: $\lambda = 0$ (di conseguenza $\mu \neq 0$, altrimenti Q è nulla).

Teorema di riduzione. *Sia $\mathcal{C}$ una conica che, nel riferimento $(O; x, y)$, ha equazione* (1)*, e siano λ, μ gli autovalori della parte principale Q. Allora possiamo trovare un nuovo riferimento $(O'; X, Y)$ e numeri reali p, q, r tali che l'equazione di $\mathcal{C}$ assume una delle seguenti forme, dette* forme canoniche*.*

I. *Se $|Q| \neq 0$:*

$$\lambda X^2 + \mu Y^2 + p = 0.$$

II. *Se $|Q| = 0$ e $|A| \neq 0$:*

$$\mu Y^2 + qX = 0 \quad \textit{con } q \neq 0.$$

III. *Se $|Q| = |A| = 0$:*

$$\mu Y^2 + r = 0.$$

Infine, i nuovi assi coordinati X, Y sono paralleli, rispettivamente, agli autospazi $E(\lambda), E(\mu)$.

Nel primo caso la conica rappresenta un'ellisse o un'iperbole (eventualmente degeneri, o a punti immaginari), nel secondo una parabola e nel terzo una parabola degenere.

3.3 Assi di simmetria e centro

Coniche di tipo I. Se la conica è del primo tipo:

$$\lambda X^2 + \mu Y^2 + p = 0,$$

si vede subito che gli assi X e Y sono assi di simmetria della conica, e dunque $\mathcal{C}$ possiede un *centro di simmetria* (l'origine O' del riferimento $\mathcal{R}'$). Diremo allora che $\mathcal{C}$ è una conica a centro. Una conica a centro è dunque un'ellisse o un'iperbole (eventualmente degeneri).

Un calcolo mostra che le coordinate (x_0, y_0) del centro di simmetria, nel vecchio riferimento $\mathcal{R}$, sono date da:

$$x_0 = \frac{\alpha_{13}}{\det Q}, \quad y_0 = \frac{\alpha_{23}}{\det Q},$$

dove α_{13} (risp. α_{23}) è il complemento algebrico dell'elemento a_{13} (risp. a_{23}) della matrice A.

Dalla dimostrazione del teorema di riduzione ricaviamo inoltre che l'asse X è *parallelo* all'autospazio $E(\lambda)$, corrispondente al primo autovalore, e l'asse Y è parallelo all'autospazio $E(\mu)$. Conoscendo le coordinate del centro, questo ci permetterà di ricavare le equazioni degli assi di simmetria nel vecchio riferimento $\mathcal{R}$.

Coniche di tipo II. Le coniche del secondo tipo rappresentano sempre una parabola e hanno equazione

$$\mu Y^2 + qX = 0,$$

con $q \neq 0$. Esse hanno un solo asse di simmetria (l'asse X) e pertanto non possiedono un centro di simmetria.

Coniche di tipo III. Infine, le coniche del terzo tipo: $\mu Y^2 + r = 0$ rappresentano una parabola degenere, cioè, a seconda del valore di r:

- una coppia di rette parallele distinte, se $r/\mu < 0$,
- l'insieme vuoto, se $r/\mu > 0$,
- una coppia di rette coincidenti, se $r = 0$.

Osserviamo che, se $\mathcal{C}$ rappresenta una coppia di rette parallele (distinte oppure no), allora tali rette dovranno essere parallele all'autospazio $E(0)$ associato all'autovalore nullo.

4 Come determinare l'equazione canonica

Usando il teorema di invarianza e il teorema di riduzione, la forma canonica di una conica si individua semplicemente calcolando:

- il determinante di A,
- gli autovalori di Q.

4.1 Esempio

Classifichiamo la conica (già vista in Sezione 2)

$$\mathcal{C} : 2x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x - 2y - 1 = 0,$$

con matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Gli autovalori di Q sono $\lambda = 1$ e $\mu = 3$; quindi $|Q| = 3$. Siamo nel primo caso del teorema di riduzione. La conica è del tipo:

$$X^2 + 3Y^2 + p = 0,$$

e nelle coordinate X, Y la sua matrice è:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}, \quad \text{dunque} \quad |A'| = 3p.$$

Un calcolo mostra che $|A| = -9$. Dal teorema di invarianza: $|A| = |A'|$ otteniamo $p = -3$ e la forma canonica

$$X^2 + 3Y^2 = 3,$$

che rappresenta l'ellisse

$$\frac{X^2}{3} + Y^2 = 1$$

con semiassi $a = \sqrt{3}, b = 1$. Le coordinate del centro sono:

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{3} = -1, \quad y_0 = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{3} = 1,$$

quindi $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Un calcolo mostra che gli autospazi di Q hanno equazioni rispettive:

$$E(\lambda) = E(1) : x + y = 0, \quad E(\mu) = E(3) : x - y = 0.$$

L'asse (di simmetria) X è la retta passante per il centro parallela a $E(\lambda)$, dunque ha equazione $x + y = 0$. In modo analogo, si verifica che l'asse Y ha equazione $x - y + 2 = 0$.

Lo studio della conica è ora completo.

4.2 Esempio

Classifichiamo la conica

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 4xy + 6y - 3 = 0.$$

Le matrici sono $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Gli autovalori di Q sono $\lambda = 3, \mu = -1$; dunque $|Q| = -3$ e la conica è del primo tipo:

$$3X^2 - Y^2 + p = 0.$$

La matrice nelle coordinate X, Y è $A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$. Ma poichè $|A| = 0$ per il teorema di invarianza si deve avere $|A'| = 0$ e quindi $p = 0$. Si ha la forma canonica:

$$3X^2 - Y^2 = 0$$

L'equazione si scrive

$$(\sqrt{3}X - Y)(\sqrt{3}X + Y) = 0, \tag{4}$$

e dunque la conica è una coppia di rette incidenti (iperbole degenere).
Il centro di simmetria ha coordinate:

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}{-3} = -2, \quad y_0 = \frac{-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}{-3} = 1,$$

quindi $C = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

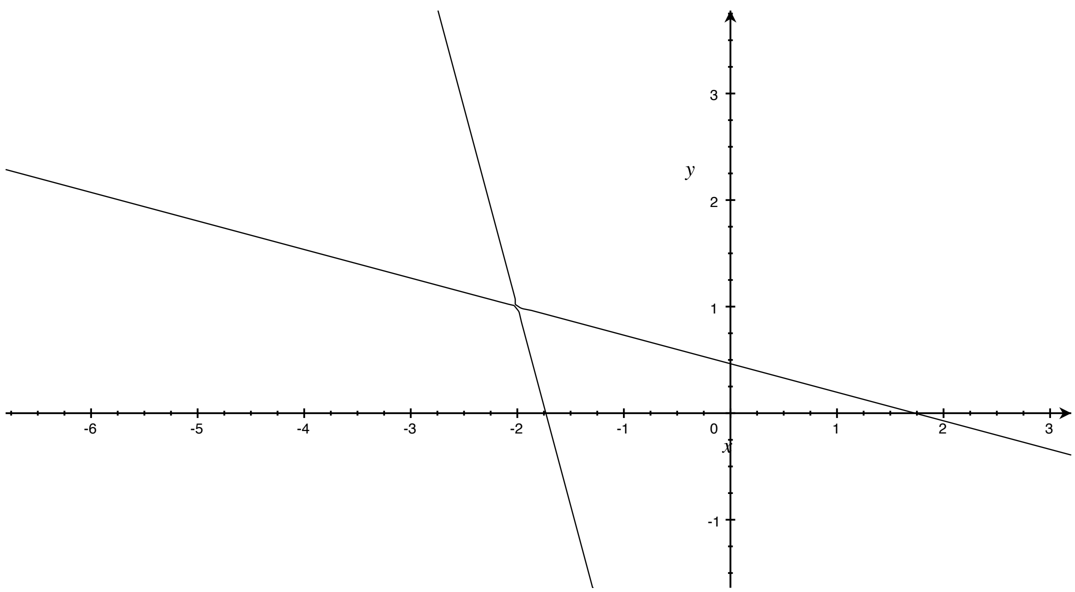

Figura 2: Grafico della conica (iperbole degenere) $x^2 + y^2 + 4xy + 6y - 3 = 0$. Equazione canonica $3X^2 - Y^2 = 0$.

Esercizio Dimostrare che, se $|Q| \neq 0$, allora la forma canonica è

$$\lambda X^2 + \mu Y^2 + \frac{|A|}{|Q|} = 0.$$

In particolare, se $|Q| < 0$ e $|A| = 0$, la conica è un'iperbole degenere.

4.3 Esempio

Classifichiamo la conica

$$x^2 + 4y^2 + 4xy + 2x + 2y + 2 = 0.$$

Si ha $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Poichè $|Q| = 0$ e $|A| = -1$ la conica è una parabola. Gli autovalori di Q sono $\lambda = 0$ e $\mu = 5$. Dunque siamo nel secondo caso del teorema di riduzione, e la forma canonica è del tipo:

$$5Y^2 + qX = 0.$$

La matrice nelle coordinate X, Y è

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{q}{2} \\ 0 & 5 & 0 \\ \frac{q}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad |A'| = -\frac{5q^2}{4}.$$

Uguagliando i determinanti: $-\dfrac{5q^2}{4} = -1$, si ha $q = \pm 2/\sqrt{5}$. Prendendo la radice negativa, otteniamo la forma canonica

$$5Y^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}X = 0,$$

che rappresenta la parabola

$$Y^2 = \frac{2}{5\sqrt{5}}X,$$

come in figura:

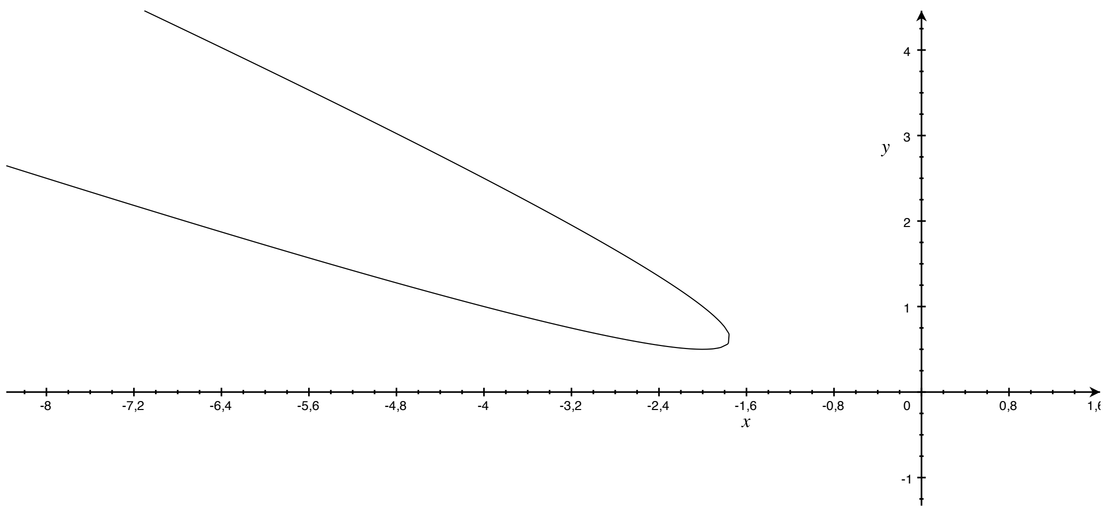

Figura 3: Grafico della conica (parabola) $x^2 + 4y^2 + 4xy + 2x + 2y + 2 = 0$.

Esercizio Dimostrare che, se $|Q| = 0$ a $|A| \neq 0$, la conica è una parabola con equazione canonica

$$Y^2 = \sqrt{-\frac{4|A|}{(\operatorname{tr} Q)^3}}X.$$

(usare il fatto che la traccia è la somma degli autovalori).

Esempio Classifichiamo la conica

$$x^2 + 4xy + 4y^2 - x - 2y = 0.$$

Le matrici sono $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 4 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Si ha $|Q| = |A| = 0$, $\lambda = 0, \mu = 5$ e, dal teorema di riduzione, la forma canonica è del tipo:

$$5Y^2 + r = 0,$$

con $r \in \mathbf{R}$. Abbiamo una parabola degenere, che a seconda del segno di r è l'insieme vuoto, una coppia di rette parallele oppure una coppia di rette coincidenti. In questo caso, però, il teorema di invarianza non ci aiuta a calcolare r (spiegare perché).

Ora sappiamo che l'autospazio associato all'autovalore $\lambda = 0$ (in questo caso, $E(0)$: $x + 2y = 0$) è parallelo all'asse di simmetria della conica: quindi, se la conica si spezza in due rette parallele (o coincidenti), queste rette dovranno essere parallele alla retta $x + 2y = 0$, e l'equazione si fattorizza:

$$x^2 + 4xy + 4y^2 - x - 2y = (x + 2y + h)(x + 2y + k)$$

con h e k da determinare. Svolgendo i calcoli, abbiamo il sistema

$$\begin{cases} h + k = -1 \\ hk = 0 \end{cases}$$

da cui $h = -1$ e $k = 0$ (oppure $h = 0, k = -1$). In ogni caso il grafico è, in effetti, l'unione delle rette parallele

$$x + 2y - 1 = 0, \quad x + 2y = 0,$$

come in figura.

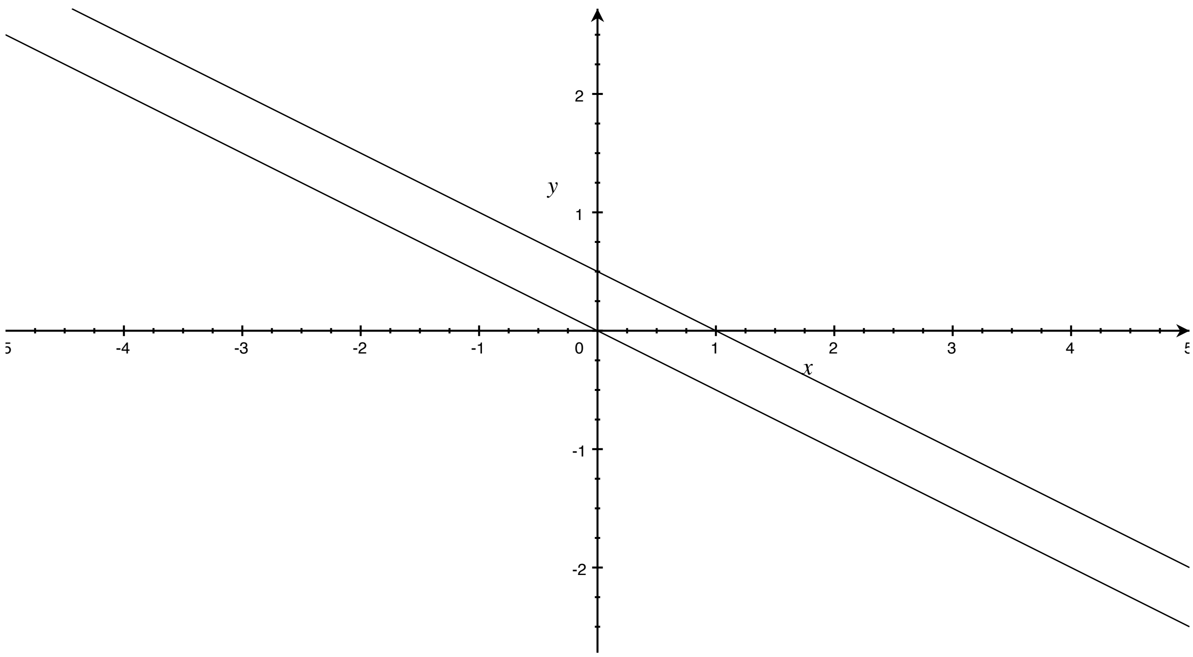

Figura 4: Grafico della conica (parabola degenere) $x^2 + 4xy + 4y^2 - x - 2y = 0$.

5 Classificazione

Possiamo classificare una conica in base ai tre numeri:

$$I_1 = \mathrm{tr} Q, \quad I_2 = \det Q, \quad I_3 = \det A,$$

che, grazie al teorema di invarianza, sono gli stessi in un qualunque riferimento.
Le coniche si dividono in coniche *generali*, se $I_3 \neq 0$, e coniche *degeneri*, se $I_3 = 0$. Otteniamo il seguente specchietto.

$$\text{Coniche generali:} \quad I_3 \neq 0 \begin{cases} I_2 > 0 : \begin{cases} I_3 I_1 > 0 & \text{ellisse immaginaria} \\ I_3 I_1 < 0 & \text{ellisse reale} \end{cases} \\ I_2 < 0 \quad \text{iperbole} \\ I_2 = 0 \quad \text{parabola} \end{cases}$$

$$\text{Coniche degeneri:} \quad I_3 = 0 \begin{cases} I_2 > 0 & \text{ellisse degenere} \\ I_2 < 0 & \text{iperbole degenere} \\ I_2 = 0 & \text{parabola degenere} \end{cases}$$

Questo dimostra, in particolare, il teorema della Sezione 1. Per verificare la validità della precedente classificazione, basta ricordare che, se λ e μ sono gli autovalori di Q, allora

$$I_1 = \lambda + \mu, \quad I_2 = \lambda\mu.$$

Quindi, si esaminano i tre casi del teorema di riduzione. Tenendo conto delle osservazioni della sezione precedente, si ha che, se $I_2 \neq 0$ la forma canonica è

$$\lambda X^2 + \mu Y^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0;$$

se $I_2 = 0$ e $I_3 \neq 0$ la conica è una parabola, e se $I_2 = I_3 = 0$ la conica è una parabola degenere.
I dettagli sono lasciati al lettore.

Esercizio Dal teorema di riduzione sappiamo che anche il rango di A è un invariante. Dimostrare allora che, se $\mathrm{rk}A = 1$, la conica rappresenta una coppia di rette coincidenti (detta conica *doppiamente degenere*).

Esempio La conica $x^2 + 3y^2 + 4xy + 2x + 2y = 0$ ha matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

e invarianti $I_1 = 4, I_2 = -1, I_3 = 0$ dunque è un'iperbole degenere (coppia di rette incidenti).

Esempio Classifichiamo la conica $3x^2 + 3y^2 + 2xy + 2x - 2y + k = 0$ al variare di $k \in \mathbf{R}$. Le matrici sono:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Invarianti: $I_1 = 6, I_2 = 8, I_3 = 8k - 8$. La conica è un ellisse se $k < 1$, un ellisse degenere (punto) se $k = 1$ e un'ellisse immaginaria (insieme vuoto) se $k > 1$.

6 Appendice

6.1 Dimostrazione del teorema di invarianza

Sia $\mathcal{C}$ una conica, sia A la matrice della conica nel riferimento $\mathcal{R} = (O; x, y)$ e A' la matrice di $\mathcal{C}$ nel riferimento $\mathcal{R}' = (O'; x', y')$. Quindi A e A' sono tali che:

$$(x, y, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad (x', y', 1)A' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

Ricordiamo che il cambiamento di coordinate da $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$ è specificato da una matrice ortogonale $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ e da un vettore di traslazione $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Se poniamo

$$T = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & x_0 \\ m_{21} & m_{22} & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

allora si ha:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{e quindi} \quad (x, y, 1) = (x', y', 1)T^t. \tag{6}$$

Dalla (6) segue che

$$(x, y, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (x', y', 1)T^t AT \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix},$$

dunque

$$A' = T^t AT. \tag{7}$$

Si verifica inoltre con un calcolo diretto che, se Q' è la parte principale di A', allora si ha

$$Q' = M^t QM, \tag{8}$$

dove Q è la parte principale di A.

Possiamo ora dimostrare il teorema di invarianza.

Dall'espressione di T in (5) si vede subito che, poiché M è una matrice ortogonale, si ha $\det T = \pm 1$. Applicando la formula di Binet all'equazione (7) otteniamo immediatamente:

$$\det A' = \det A,$$

e quindi il determinante di A è invariante. Ora si dimostra facilmente che, se B, C sono matrici $n \times n$, e se C è invertibile, allora $\mathrm{rk}(BC) = \mathrm{rk}(CB) = \mathrm{rk}B$. Dunque, poichè T e T^t sono invertibili:

$$\mathrm{rk}(A') = \mathrm{rk}(T^t AT) = \mathrm{rk}((T^t A)T) = \mathrm{rk}(T^t A) = \mathrm{rk}A,$$

e il rango di A è anch'esso invariante. Infine la (8) mostra che Q' e Q sono matrici simili: di conseguenza hanno stesso determinante e stessa traccia.

La dimostrazione è completa.

6.2 Dimostrazione del teorema di riduzione

Sia

$$\mathcal{C} : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{9}$$

l'equazione di una conica nel riferimento $\mathcal{R} = (O; x, y)$. Dimostriamo che possiamo sempre trovare un riferimento $(O; X, Y)$ nel quale l'equazione assume una delle forme $\mathbf{I}, \mathbf{II}, \mathbf{III}$.

Primo passo. Diagonalizziamo la forma quadratica del gruppo omogeneo di secondo grado. Risulterà

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = \lambda x'^2 + \mu y'^2, \tag{10}$$

dove λ, μ sono gli autovalori della parte principale $Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$. Sappiamo inoltre che, se $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ è la matrice ortogonale tale che $M^t Q M = D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ allora

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x = m_{11}x' + m_{12}y' \\ y = m_{21}x' + m_{22}y' \end{cases}. \tag{11}$$

La (11) mostra che x e y dipendono linearmente da x' e y': sostituendo (10) e (11) nell'equazione della conica arriviamo a un'equazione del tipo:

$$\lambda x'^2 + \mu y'^2 + ax' + by' + c = 0, \tag{12}$$

per opportuni $a, b, c \in \mathbf{R}$. Dunque, mediante una trasformazione ortogonale (quella di matrice M) abbiamo eliminato il termine misto.

Secondo passo. Distinguiamo due casi.

Primo caso: $|Q| \neq 0$, quindi λ e μ sono entrambi non nulli.

Possiamo allora completare i quadrati in (12). Si avrà:

$$\begin{cases} \lambda x'^2 + ax' = \lambda\Big(x' + \dfrac{a}{2\lambda}\Big)^2 - \dfrac{a^2}{4\lambda}, \\ \mu y'^2 + by' = \mu\Big(y' + \dfrac{b}{2\mu}\Big)^2 - \dfrac{b^2}{4\mu}, \end{cases}$$

Ponendo:

$$\begin{cases} X = x' + \dfrac{a}{2\lambda} \\ Y = y' + \dfrac{b}{2\mu} \end{cases}$$

(che equivale a una traslazione degli assi) e sostituendo in (12) l'equazione assume la forma canonica del tipo **I**:

$$\lambda X^2 + \mu Y^2 + p = 0$$

per un'opportuno $p \in \mathbf{R}$.

Secondo caso. Assumiamo ora $|Q| = 0$: dunque uno degli autovalori è nullo. Per convenzione, dobbiamo porre $\lambda = 0$ e necessariamente $\mu \neq 0$. L'equazione (12) si scrive

$$\mu {y'}^2 + ax' + by' + c = 0, \tag{13}$$

Completiamo i quadrati nei termini in y':

$$\mu y'^2 + by' = \mu\Big(y' + \frac{b}{2\mu}\Big)^2 - \frac{b^2}{4\mu},$$

e poniamo

$$\begin{cases} X = x' \\ Y = y' + \dfrac{b}{2\mu} \end{cases}$$

l'equazione (13) diventa

$$\mu Y^2 + aX + r = 0 \tag{14}$$

per un'opportuno $r \in \mathbf{R}$. Se $a = 0$ otteniamo la forma canonica del tipo **III**:

$$\mu Y^2 + r = 0.$$

Se $a \neq 0$, con l'ulteriore traslazione

$$\begin{cases} X' = X + \dfrac{r}{a} \\ Y' = Y \end{cases}$$

l'equazione (14) si trasforma nella forma canonica del tipo **II**:

$$\mu Y'^2 + aX' = 0, \tag{15}$$

con $a \neq 0$. In conclusione, per arrivare alla forma canonica abbiamo effettuato solamente trasformazioni ortogonali e traslazioni degli assi, vale a dire, cambiamenti di coordinate. Infine, notiamo dall'equazione (15) che la matrice della conica nelle coordinate X', Y' è:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & \mu & 0 \\ \frac{a}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad |A'| = -\frac{\mu a^2}{4} \neq 0.$$

Dall'invarianza del determinante: $|A| = |A'| \neq 0$ concludiamo che la forma canonica **II** si ottiene esattamente quando $|Q| = 0, |A| \neq 0$. Quindi si ottiene **III** se e solo se $|Q| = |A| = 0$. La dimostrazione è completa.