TEOREMA DEI MINORI PRINCIPALI

Sia
$$F : V \times V \to \mathbf{R}$$
una forma bilineare simmetrica su uno spazio vettoriale reale V di dimensione n. Siano poi $b = \{\overline{b}_1, \ \ldots, \ \overline{b}_n\}$ una base di V e $B = (F(\overline{b}_i, \overline{b}_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice di F rispetto a b. Vale allora il seguente:

Teorema 1. *F è un prodotto scalare se e solo se i minori principali di B sono tutti > 0.*

Dimostrazione. Per induzione su $n \geq 1$. Per $n = 1$ $B = (b_{11})$ ed è immediato che F è un prodotto scalare se e solo se $b_{11} > 0$.

Sia $n > 1$ e sia A la sottomatrice di B formata dalla intersezione delle prime $n-1$ righe con le prime $n-1$ colonne. Sia inoltre $W \subset V$ il sottospazio generato dai vettori $\overline{b}_1, \ \ldots, \ \overline{b}_{n-1}$ della base b. Osserviamo allora che la forma bilineare simmetrica $F|_{W \times W} : W \times W \to \mathbf{R}$ [1] ha come matrice associata rispetto alla base $\{\overline{b}_1, \ \ldots, \ \overline{b}_{n-1}\}$ di W proprio la matrice A. Infatti abbiamo $A = (F(\overline{b}_i, \overline{b}_j)), \ 1 \leq i, j \leq n-1$.

I minori principali di A sono i minori principali di B diversi da $\det B$. Quindi sono strettamente positivi. Poiché $\dim W = n - 1$ segue allora per induzione che $F|_{W \times W}$ è un prodotto scalare su W. Si consideri ora il sottospazio $W^\perp$ ortogonale a W. È facile osservare che, essendo $\dim W = n - 1$, la dimensione di $W^\perp$ è ≥ 1. Esiste allora un vettore non nullo $\overline{u} \in W^\perp$. Tale vettore non appartiene a W: in caso contrario avremmo $\overline{u} \in W^\perp \cap W$. Quindi avremmo $F(\overline{u}, \overline{u}) = 0$ e $\overline{u}$ sarebbe un vettore isotropo di $F|_{W \times W}$: impossibile perché $F|_{W \times W}$ è un prodotto scalare. Ne segue quindi che $\overline{u} \notin W$ e che $F(\overline{u}, \overline{u}) = c \neq 0$.

Siccome $\overline{u} \notin W$, i vettori $\overline{b}_1, \ \ldots, \ \overline{b}_{n-1}, \ \overline{u}$ formano una base di V. La matrice di F rispetto a tale base è
$$C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix},$$
poiché $F(\overline{u}, \overline{b}_1) = \cdots = F(\overline{u}, \overline{b}_{n-1}) = 0$. Abbiamo allora $C = {}^tPBP$, dove P è la matrice del cambiamento di base dalla base b alla base $\{\overline{b}_1 \ldots \overline{b}_{n-1} \ \overline{u}\}$. Sviluppando $\det C$ rispetto all'ultima riga si ha
$$\det C = c(\det A) = (\det P)^2 (\det B).$$

[1] $F|_{W \times W}$ indica la restrizione a $W \times W$ della funzione $F : V \times V \to \mathbf{R}$

Quindi $c > 0$, essendo $\det A$, $\det B$ minori principali di B ed essendo $(\det\ P)^2 > 0$. Possiamo concludere che F è un prodotto scalare: sia infatti $\overline{v} \in V$. Si noti che $W = \{\overline{u}\}^\perp$ e che $\overline{u}$ è non isotropo per cui

$$V = W \oplus < \overline{u} > .$$

Allora possiamo scrivere $\overline{v} = \overline{w} + t\overline{u}$, dove $\overline{w} \in W$ e $t \in \mathbf{R}$. Calcolando infine $F(\overline{v}, \overline{v})$ abbiamo

$$F(\overline{v}, \overline{v}) = F(\overline{w}, \overline{w}) + t^2 F(\overline{u}, \overline{u}) = F(\overline{w}, \overline{w}) + ct^2.$$

La precedente espressione è ≥ 0 poiché $F(\overline{w}, \overline{w}) \geq 0$ e $c > 0$. Inoltre è uguale a 0 se e solo se $t = 0$ e $F(\overline{w}, \overline{w}) = 0$. Equivalentemente: se e solo se $\overline{w} = \overline{0}$ e $t = 0$ e cioè se e solo se $\overline{v} = 0$. Quindi F è un prodotto scalare.

Il viceversa del caso $n > 1$ è lasciato al lettore. $\square$