Università Roma Tre
Corso di laurea in Matematica
GE210-Geometria 2 - A.A. 2015-2016
Curve algebriche piane
prof. Cigliola

Esercizio 1. Determinare l'equazione della retta tangente a ciascuna delle seguenti curve algebriche piane affini nei punti accanto indicati:

(i) $\mathscr{C}:\ x^2 - 2x + y^2 = 0$ nel punto $P = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$; $[x - \sqrt{3}y + 1 = 0]$

(ii) $\mathscr{C}:\ (x + y)(x - y + 2) = 0$ nel punto $P = (0, 0)$; $[x + y = 0]$

(iii) $\mathscr{C}:\ x^4 + y^4 - 3x^2y = 0$ nei suoi punti di ordinata 1;

[La curva è simmetrica rispetto all'asse y. I punti di ordinata 1 sono i punti $(\pm\sqrt{2} \pm 1,\ 1)$, con tutte le combinazioni di segno.

La retta tangente a $(\sqrt{2} + 1,\ 1)$ è $r_1:\ (20\sqrt{2} - 8)x - 23y - 12\sqrt{2} - 9 = 0$.

La retta tangente a $(\sqrt{2} - 1,\ 1)$ è $r_2:\ (20\sqrt{2} + 8)x - 23y + 12\sqrt{2} - 9 = 0$.

Le altre due rette si ottengono per simmetria rispetto all'asse y da r_1 ed r_2.]

(iv) $\mathscr{C}:\ x^3 - 6xy + y^3 = 0$ in un suo generico punto $(x_0,\ y_0) \neq (0,\ 0)$;

$[(x_0^2 - 2y_0)\,x + (y_0^2 - 2x_0)\,y - 2x_0y_0 = 0]$

(v) $\mathscr{C}:\ x^2 + (y - 1)^2 = r^2$, con $r > 0$, in un suo generico punto $(x_0,\ y_0)$;

$[x_0\,x + (y_0 - 1)\,y - r^2 - 2y_0 + 1 = 0]$

(vi) $\mathscr{C}:\ xy - 1 = 0$ in un suo generico punto $(x_0,\ y_0)$. $[y_0\,x + x_0\,y - 2 = 0]$

Esercizio 2. Si dia l'equazione della chiusura proiettiva (rispetto ad X_0) delle curve dell'Esercizio 1 e si trovino i loro punti impropri.

[(i) $\overline{\mathscr{C}}:\ X_1^2 - 2X_0X_1 + X_2^2 = 0,\ P_1[1,1,0],\ P_2[1,2,0]$
(ii) $\overline{\mathscr{C}}:\ X_1^2 + 2X_0X_1 + 2X_0X_2 - X_2^2 = 0,\ P_1[1,1,0],\ P_2[1,-1,0]$
(iii) $\overline{\mathscr{C}}:\ X_1^4 + X_2^4 - 3X_1^2X_2X_0 = 0$, non ci sono punti all'infinito
(iv) $\overline{\mathscr{C}}:\ X_1^3 + X_2^3 - 6X_1X_2X_0 = 0,\ P[1,-1,0]$
(v) $\overline{\mathscr{C}}:\ X_1^2 + (X_2 - X_0)^2 = r^2X_0^2$, non ha punti all'infinito
(vi) $\overline{\mathscr{C}}:\ X_1X_2 = X_0^2,\ X_\infty[1,0,0]$ e $Y_\infty[0,1,0]$]

Esercizio 3. Determinare l'equazione della retta tangente a ciascuna delle seguenti curve algebriche piane proiettive nei punti accanto indicati:

(i) $\mathscr{C}:\ X_0X_1 + 6X_2^2 + X_1^2 - 5X_1X_2 = 0$ in $P = [3,1,0]$; $[X_1 - 3X_2 + 3X_0 = 0]$

(ii) $\mathscr{C}:\ X_1^5 - 2X_2^3X_0^2 - 2X_0^2X_1X_2^2 - X_0^4X_1 + X_2X_0^4 = 0$ in $P[0,0,1]$ $[X_1 - X_2 = 0]$

(iii) $\mathscr{C}:\ 2X_0 - 3X_1 + X_2 = 0$ in $P[1,1,1]$ $[2X_0 - 3X_1 + X_2 = 0]$

(iv) $\mathscr{C}:\ X_1^3 + X_2^3 + X_0X_1X_2 - 2X_0^2X_1 = 0$ in un suo generico punto $P[x_1, x_2, x_0]$

$[(3x_1^2 - 2x_0^2 + x_0x_2)\,X_1 + (3x_2^2 + x_0x_1)\,X_2 + (x_1x_2 - 4x_1x_0)\,X_0 = 0]$

Esercizio 4. Determinare i punti regolari (propri e impropri) a tangente orizzontale ed a tangente verticale delle seguenti curve algebriche piane:

(i) $\mathscr{C}:\ (y+1)(xy-y+1)=0$;

[La curva è unione dell'iperbole $\mathscr{I}:\ xy-y+1=0$ e della retta $r:\ y=1$. Tutti i punti di r sono a tangente orizzontale, tranne $P(2,-1)$ che è singolare (un nodo a tangenti distinte). L'iperbole ha asintoti paralleli agli assi coordinati. Il punto all'infinito dell'asse y ha tangente verticale coincidente con l'asse y. Il punto all'infinito dell'asse x è invece singolare perché doppio: ha per tangenti la retta r e l'asse x.]

(ii) $\mathscr{C}:\ x^3+y^3=0$;

[Non ci sono punti regolari a tangente orizzontale o verticale. Si osservi che la curva è unione della retta $x+y=0$ e della conica $x^2+y^2-xy=0$ che coincide con l'origine, che è pertanto un punto singolare della curva.]

(iii) $\mathscr{C}:\ x^3+y^3-xy=0$;

[Non ci sono asintoti paralleli agli assi. Annullando la derivata parziale rispetto ad x si ottiene il punto $P(\frac{1}{3}\sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{4})$ a tangente orizzontale. Poiché la curva è simmetrica rispetto alla bisettrice di primo e terzo quadrante, il punto $P'(\sqrt[3]{4},\ \frac{1}{3}\sqrt[3]{2})$ ha tangente verticale. Si osservi che l'origine è un nodo con tangenti gli assi cartesiani.]

(iv) $\mathscr{C}:\ x(y-x)^2=y^2$;

[La curva ha l'asintoto verticale $x=1$. Il punto $P(\frac{9}{4},\ \frac{27}{4})$ ha tangente orizzontale. Non ci sono punti propri a tangente verticale.]

(v) $\mathscr{C}:\ x^n+y^n=1$, con $n>1$ intero;

[Per $n=1$ non ci sono punti a tangente orizzontale o verticale. Per $n>1$ pari, si hanno i punti $(0,\pm1)$ a tangente orizzontale e i punti $(\pm1,0)$ a tangente verticale. Per $n>1$ dispari si hanno il punto $(0,1)$ a tangente orizzontale e il punto $(0,1)$ a tangente verticale.]

(vi) $\mathscr{C}:\ y^2+xy-2x^2=0$.

[Non ci sono punti a tangente orizzontale o verticale.]

Esercizio 5. Sia data la curva $\mathscr{C}:\ y=p(x)$, dove $p(x)$ è un polinomio nella sola indeterminata x. Dimostrare che $\mathscr{C}$ è una curva algebrica liscia e provare che l'equazione della retta tangente in un suo punto generico (usando il gradiente) coincide con la retta tangente trovata con i metodi dell'Analisi Matematica. Quanti sono i punti impropri di $\mathscr{C}$?

Esercizio 6. Determinare la chiusura proiettiva e i punti impropri delle curve di $\mathbb{A}^2$ di equazioni seguenti:

(i) $\mathscr{C}:\ 3x+2y^2=1$ [$\overline{\mathscr{C}}:\ 3X_0X_1+2X_2^2=X_0^2,\ P[1,0,0]$]

(ii) $\mathscr{C}:\ x+y-5x^2y=0$ [$\overline{\mathscr{C}}: X_0^2X_1+X_0^2X_2-5X_1^2X_2=0,\ X_\infty[1,0,0]$ e $Y_\infty[0,1,0]$]

(iii) $\mathscr{C}:\ 2x-6y+2x^2y-4xy^2=0$

[$\overline{\mathscr{C}}:\ 2X_0^2X_1-6X_0^2X_2+2X_1^2X_2-4X_1X_2^2=0,$ $X_\infty[1,0,0]$, $Y_\infty[0,1,0]$ e $P[2,1,0]$]

(iv) $\mathscr{C}:\ x^2y^2-1=0$ [$\overline{\mathscr{C}}:\ X_1^2X_2^2=X_0^4,\ X_\infty$ e Y_∞]

(v) $\mathscr{C}:\ x^2y^2+2=0$

[La curva $\mathscr{C}$ è vuota. Si osservi però che la sua chiusura proiettiva è costituita dai soli punti (singolari) impropri X_∞ e Y_∞ che pertanto *non si vedono* nel piano affine.]

Esercizio 7. Individuare le simmetrie (rispetto agli assi, rispetto all'origine, rispetto alle bisettrici) delle seguenti curve:

(i) $\mathscr{C}: \ x^2 + y^2 = 9$; [Simmetrica rispetto agli assi, l'origine e le bisettrici]

(ii) $\mathscr{C}: \ x + y - 2 = 0$ [Simmetrica rispetto alla bisettrice $y = x$]

(iii) $\mathscr{C}: \ x^3y^2 - x^2 + y^4 = 0$; [Simmetrica rispetto all'asse x]

(iv) $\mathscr{C}: \ y^4 - y^2 + x^2 - x^4 = 0$; [Simmetrica rispetto agli assi, origine e bisettrici]

(v) $\mathscr{C}: \ 3xy + x^3y^3 - 2x^5 = 0$ [Simmetrica rispetto all'asse y]

Esercizio 8. Determinare gli (eventuali) asintoti delle seguenti curve algebriche piane e abbozzare la configurazione della curva in un intorno dei suoi punti all'infinito:

(i) $\mathscr{C}: \ (x-1)y - x = 0$;

[La chiusura proiettiva di $\mathscr{C}$ non ha punti singolari. I punti impropri sono X_∞ e Y_∞. Più brevemente, l'asintoto verticale si trova annullando il coefficiente del termine di grado massimo in y, ovvero $(x-1)y$. Da cui $x = 1$ è l'asintoto cercato. Similmente l'asintoto orizzontale è dato annullando il coefficiente di grado massimo in x. Riscrivendo $\mathscr{C}$ come $x(y-1) - y = 0$, si ottiene $y = 1$. Si osservi che $\mathscr{C}$ è un'iperbole.]

(ii) $\mathscr{C}: \ x(y-x) - y^3 - yx^2 = 0$;

[L'unico punto improprio è X_∞. Il termine di grado massimo in x è $-x^2(y+1)$ da cui si ottiene l'asintoto $y = -1$ rispetto a cui la curva è da parti opposte.]

(iii) $\mathscr{C}: \ (x^2-1)y - x^2 + 4y = 0$;

[La curva è tutta dalla stessa parte (sotto) l'asintoto $y = 1$]

(iv) $\mathscr{C}: \ x^2(y+2) = y^2(x-1)$;

[La curva è da parti opposte rispetto a tutti i suoi asintoti: $y = -2$, $x = 1$ e $y = x + 3$]

(v) $\mathscr{C}: \ x^3 + y^3 = 1$;

[La curva è tutta dalla stessa parte (sopra) l'asintoto $y = -x$]

(vi) $\mathscr{C}: \ x^4 + y^4 = 1$; [La curva non ha asintoti]

(vii) $\mathscr{C}: \ x(y-x)^2 = y^2$;

[I punti singolari della curva sono Y_∞ che origina l'asintoto $x = 1$ (rispetto a cui la curva è da parti opposte) ed il punto $P[1,1,0]$ con tangente $X_0 = 0$ che quindi non determina asintoti per $\mathscr{C}$.]

(viii) $\mathscr{C}: \ y(y-x)(y+2x) = 9x$.

[La curva ha gli asintoti $y = 0$, $y = -2x$ e $y = x$ rispetto a cui è da parti opposte.]

Esercizio 9. Determinare i punti singolari propri e impropri delle seguenti curve algebriche piane:

(i) $\mathscr{C}: \ x^3 - 6xy + y^3 = 0$;

[Il gradiente omogenizzato è $\nabla = (-6X_1X_2;\ 3X_1^2 - 6X_0X_2;\ -6X_0X_1 + 3X_2^2)$. Si ottiene il solo punto singolare $O(0,0)$.]

(ii) $\mathscr{C}: \ y^2(1-x^2) = (x^2+2y-1)^2$;

[Il gradiente omogenizzato è $\nabla = (-4X_0^3 + 4X_0X_1^2 + 12X_0^2X_2 - 4X_1^2X_2 - 6X_0X_2^2;\ 4X_0^2X_1 - 4X_1^3 - 8X_0X_1X_2 - 2X_1X_2^2;\ 4X_0^3 - 4X_0X_1^2 - 6X_0^2X_2 - 2X_1^2X_2)$. Si ottengono i punti propri $P(1,0)$, $P'(-1,0)$ e il punto improprio $Y_\infty[0,1,0]$]

(iii) $\mathscr{C}:\ x^3y + x^2y^2 + xy^3 - 2xy - 1 = 0$; [$P(1,-1)$ e $P'(-1,1)$.]

(iv) $\mathscr{C}:\ (x^2-1)^2 + (y^2-1)^2 = 1$;
[Il gradiente omogenizzato è $\nabla = (-4X_0^2X_1 + 4X_1^3;\ -4X_0^2X_2 + 4X_2^3;\ 4X_0^3 - 4X_0X_1^2 - 4X_0X_2^2)$. Si ottengono i punti $(\pm1,0)$, $(0,\pm1)$.]

(v) $\mathscr{C}:\ x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1 = 0$;
[Si osservi che la curva può essere riscritta come $(x^2-1)(y^2-1) = 0$. È facile allora capire che i suoi punti singolari sono $(1,\pm1)$, $(-1,\pm1)$, X_∞, Y_∞]

(vi) $\mathscr{C}:\ xy^2 + 2y - x^2 - 3x - 3 = 0$. [$(-1,1)$]

Esercizio 10. Si considerino le curve

$$\mathscr{C}:\ (y^2-x^2)(x-1)(2x-3) = 4(y^2+x^2-2x)^2$$

$$\mathscr{D}:\ (x^2+y^2)(x^2+y^2-2x)^2 = 4(x^2-y^2)^2.$$

(i) Provare che i punti $O(0,0)$, $P(1,1)$ e $Q(1,-1)$ sono punti singolari di entrambe le curve $\mathscr{C}$ e di $\mathscr{D}$.
[Per stabilire che l'origine è un punto singolare delle due curve, si osservi che i termini di grado minimo nei polinomi di $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ sono di grado maggiore di 1. Per gli altri due punti si proceda al calcolo del gradiente come di consueto.]

(ii) Determinare il complesso tangente nell'origine a $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$.
[Guardando ai termini di grado minimo nell'equazione di $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$, si trova che il complesso per $\mathscr{C}$ è l'unione delle due rette $y = \pm\sqrt{\frac{19}{3}}\,x$. Il complesso tangente a $\mathscr{D}$ nell'origine è invece dato da $3x^2y^2 - y^4 = 0$ che produce la retta $y = 0$ contata due volte (rispetto a cui l'origine è una cuspide) e le rette $y = \pm\sqrt{3}x$.]

(iii) Provare che entrambe le curve hanno grafico limitato.
[Posto $X_0 = 0$, nell'equazione della chiusura proiettiva di $\mathscr{D}$ si ottiene $(X_1^2+X_2^2)(X_1^2+X_2^2)^2 = 0$ che non produce punti reali. Similmente, nella chiusura proiettiva di $\mathscr{C}$ si ottiene $2(X_2^2-X_1^2)X_1^2 - 4(X_1^2+X_2^2)^2 = 0$, che non ha soluzioni reali. Pertanto le due curve non hanno rami che si spingono fino all'infinito.]

Esercizio 11. Sia data la curva

$$\mathscr{C}:\ y^2(x-1)^2(x-y)^2 - x^2 - y^2 = 0.$$

(i) Provare che $\mathscr{C}$ ha l'origine come punto singolare e determinare il suo complesso tangente.
[La curva passa per l'origine poiché non compare il termine noto. La parte di grado minimo nell'equazione di $\mathscr{C}$ è $-x^2-y^2 = 0$ che non produce rette reali. Si tratta pertanto di un punto isolato.]

(ii) Provare che tutti i punti impropri di $\mathscr{C}$ sono singolari.
[La chiusura proiettiva di $\mathscr{C}$ è $\overline{\mathscr{C}}:\ X_2^2(X_1-X_0)^2(X_1-X_2)^2 - X_1^2X_0^4 - X_2^2X_0^4 = 0$. Ponendo $X_0 = 0$, si ottengono i punti $X_\infty[1,0,0]$, $Y_\infty[0,1,0]$ e $B[1,1,0]$. Per provare che sono singolari, si verifichi che annullano il gradiente.]

(iii) Determinare gli asintoti di $\mathscr{C}$.

[Poiché i punti impropri di $\mathscr{C}$ sono singolari, gli asintoti non possono essere calcolati a partire dalla formula della retta tangente. Nei punti impropri X_∞ e Y_∞ l'insieme delle rette tangenti (che sono asintoti per $\mathscr{C}$ *se si vedono* nel piano affine) sono dati dall'annullamento del coefficiente del termine di grado massimo in x ed y rispettivamente. Il termine di grado massimo in x è y^2x^4 che produce l'asintoto $y=0$ contato due volte. Il punto all'infinito dell'asse x si comporta come una cuspide. Con un procedimento analogo, il termine di grado massimo in y è $(x-1)^2y^4$ che dà l'asintoto $x=1$ contato due volte. Quindi, anche il punto Y_∞ (preso sulla retta $x=1$) è una cuspide posta all'infinito per $\mathscr{C}$. Per il punto B, che è il punto all'infinito della bisettrice $y=x$, conviene utilizzare un cambio di variabili per portare il punto dall'infinito al finito, meglio se nell'origine, nel quale sappiamo subito individuare il complesso tangente. Utilizzeremo la trasformazione $\chi:\begin{cases}Y_1=X_0\\ Y_2=X_2-X_1\\ Y_0=X_1\end{cases}$. Questa è conveniente poiché $\chi(B)=B'=[0,0,1]$, ovvero l'origine del nuovo sistema di riferimento. Geometricamente, la trasformazione χ effettua una rotazione della sfera che rappresenta il piano proiettivo, portando nell'origine B' il punto improprio B. La trasformazione inversa è $\chi^{-1}:\begin{cases}X_0=Y_1\\ X_1=Y_0\\ X_2=Y_2+Y_0\end{cases}$. Inoltre la curva trasformata sotto χ è $\chi(\overline{\mathscr{C}})=\mathscr{C}'$: $(Y_2+Y_0)^2(Y_0-Y_1)^2Y_2^2-Y_0^2Y_1^4-(Y_0+Y_2)^2Y_1^4=0$. Per studiare il comportamento di $\mathscr{C}'$ nella (nuova) origine deomogenizziamo con la sostituzione $Y_0=1$, $Y_1=u$ e $Y_2=v$. Si ottiene $(v+1)^2(1-u)^2v^2-u^4-(1+v)^2u^4=0$. I termini di grado minimo sono dati da $v^2=0$. Questo ci dice che la nuova origine è un punto singolare (doppio) con tangente doppia $v=0$. Tornando in coordinate omogenee si ha $Y_2=0$ contato due volte. Ritornando infine alle coordinate proiettive iniziali, si ha la retta $X_2-X_1=0$ contata due volte. Questa ci dà l'asintoto $y=x$ contato due volte.]

Esercizio 12. Dopo aver verificato che l'origine è un punto delle seguenti curve, determinare il complesso ad esso tangente e tracciare il grafico della curva in un intorno dell'origine:

(i) $\mathscr{C}:\ x^3-6xy+y^3=0$; [nodo con tangenti gli assi coordinati]

(ii) $\mathscr{C}:\ y^2=x^3-2x^2$; [punto isolato]

(iii) $\mathscr{C}:\ y^2=5x^3$; [cuspide con tangente l'asse x contato due volte]

(iv) $\mathscr{C}:\ y^2-x^3-x=0$; [punto regolare con tangente verticale]

(v) $\mathscr{C}:\ y^2-x^3+x^4=0$; [nodo con tangenti gli assi coordinati]

(vi) $\mathscr{C}:\ y^4+x^4+xy^2=0$; [cuspide con tangente l'asse x contato due volte]

(vii) $\mathscr{C}:\ x^2(y+2)=y^2(x-1)$; [nodo con tangenti le bisettrici]

(viii) $\mathscr{C}:\ (x^2+y^2)(y+x)^2=10xy(x-y)$; [punto triplo $x=0$, $y=0$ e $y=x$]

(ix) $\mathscr{C}:\ (x^2-3y^2)(2y+x)^2=10x^2(x-y)$; [punto triplo $x=0$ doppio e $y=x$]

(x) $\mathscr{C}:\ xy^2+2y-x^2-3x=0.$ [punto regolare con tangente $y=\frac{3}{2}x$]

Esercizio 13. Dopo aver verificato che le seguenti curve hanno punti impropri singolari, determinarne gli (eventuali) asintoti:

(i) $\mathscr{C}:\ (x-1)y^2-x=0;$

[La curva ammette i punti impropri X_∞ e Y_∞. Gli asintoti sono dati annullando i coefficienti dei termini di grado massimo in x ed y rispettivamente. Si ha $x(y^2-1)$ da cui gli asintoti $y=\pm1$ e $(x-1)y^2$ da cui l'asintoto $x=1$. In particolare, poiché X_∞ ha due tangenti distinte, è un punto singolare. Alternativamente si può procedere col gradiente come di consueto.]

(ii) $\mathscr{C}:\ y^2x(y-x)-y^3-yx^2+2x^2=0;$

[La curva ammette i punti impropri X_∞ che è singolare, Y_∞ e $B[1,1,0]$. La tangente a B è la retta $X_1-X_2+2X_0=0$ che produce l'asintoto $y=x+2$. L'asintoto verticale si ottiene da $(x-1)y^3$ prendendo $x=1$. Le rette tangenti nel punto all'infinito dell'asse x si ottengono dal termine di grado massimo in x: $x^2(-y^2-y+2)$ che danno le rette $y=1$ e $y=-2$. Pertanto X_∞ è un nodo.]

(iii) $\mathscr{C}:\ (x^2-1)(x-2)y^2-x^3+4y=0;$

[I termini di grado massimo della chiusura proiettiva sono dati da $(X_1^2-X_0^2)(X_1-2X_0)X_2^2$. Ponendo $X_0=0$, si ottengono i punti impropri X_∞ e Y_∞. Entrambi i punti sono singolari poiché annullano il gradiente. Gli asintoti sono ottenuti annullando i coefficienti dei termini di grado massimo in x e y rispettivamente. Da $(x^3-2x^2-x+2)y^2$ si ottengono gli asintoti verticali $x=\pm1$ e $x=2$. Da $(y^2-1)x^3$ si ottengono gli asintoti orizzontali $y=\pm1$.]

(iv) $\mathscr{C}:\ x^2(y-x-1)^2=y;$

[La chiusura proiettiva è $\overline{\mathscr{C}}:\ X_1^2(X_2-X_1-X_0)^2-X_2X_0^3=0$. Il gradiente omogeneo è $\nabla=(2X_0^2X_1+6X_0X_1^2+4X_1^3-4X_0X_1X_2-6X_1^2X_2+2X_1X_2^2;\ -X_0^3-2X_0X_1^2-2X_1^3+2X_1^2X_2;\ -3X_0^2X_2)$. I punti impropri sono Y_∞ e $B[1,1,0]$, entrambi singolari. Gli asintoti verticali sono dati considerando x^2y^2 che dà $x=0$ contato due volte. Pertanto Y_∞ è una cuspide. Per l'eventuale asintoto tangente in B, si proceda con il cambio di variabili $\chi:\begin{cases}Y_1=X_0\\ Y_2=X_2-X_1\\ Y_0=X_1\end{cases}$. Si ha $\chi(B)=B'=[0,0,1]$, ovvero l'origine del nuovo sistema di riferimento. La trasformazione inversa è $\chi^{-1}:\begin{cases}X_0=Y_1\\ X_1=Y_0\\ X_2=Y_2+Y_0\end{cases}$. La curva trasformata è $\chi(\overline{\mathscr{C}}):\ Y_0^2(Y_2-Y_1)^2-(Y_2+Y_0)Y_1^3=0$. Per studiare il comportamento nella (nuova) origine, deomogenizziamo con la sostituzione $Y_0=1$, $Y_1=u$ e $Y_2=v$. Si ottiene $(v-u)^2-(v+1)v^3=0$. I termini di grado minimo sono dati da $v-u=0$ contato due volte. Questo ci dice che la nuova origine è un punto singolare (doppio) con tangente doppia $v-u=0$. Tornando in coordinate omogenee si ha $Y_2=Y_1$ contato due volte. Ritornando infine alle coordinate proiettive iniziali, si ha la retta $X_2-X_1=X_0$ contata due volte. Questa ci dà l'asintoto $y=x+1$ contato due volte.]

Esercizio 14. Studiare e tracciare il grafico delle seguenti curve algebriche piane:

(i) $\mathscr{C}:\ 2x^2 - 4x + 2 + 3y^2 - 4 = 0$; [ellisse]

(ii) $\mathscr{C}:\ x^3 - 9xy + y^3 = 0$; [folium di Cartesio]

(iii) $\mathscr{C}:\ y^2 = x^3 - 2x^2$; [parabola divergente di Newton con punto isolato]

(iv) $\mathscr{C}:\ y^2 = x^3$; ; [parabola cuspidata]

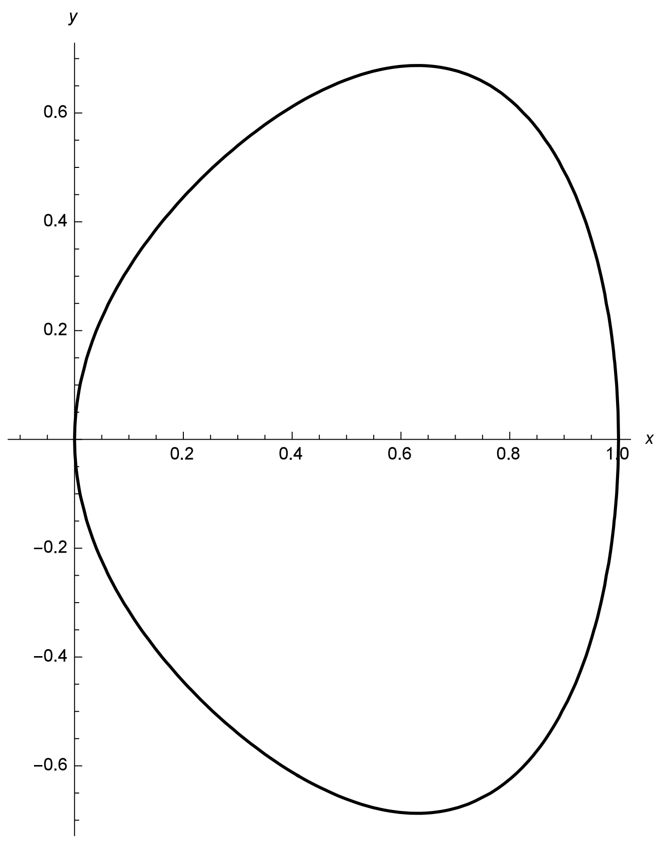
(v) $\mathscr{C}:\ y^2 - x^3 - 2x = 0$; [parabola divergente semplice]

(vi) $\mathscr{C}:\ y^2 = 2x^3 - 4x$; [parabola divergente con ovale]

(vii) $\mathscr{C}:\ y^2 = x^3 - x^4$; [si veda lo studio nelle *Note*]

(viii) $\mathscr{C}:\ y^2 = x - x^4$;

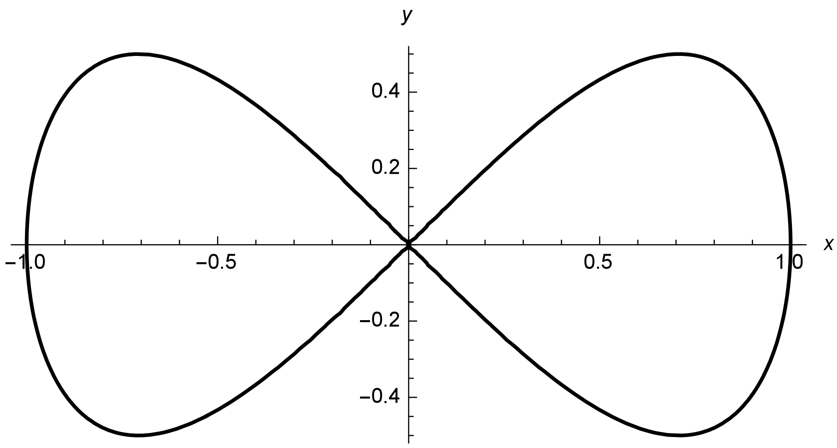
[La curva è simmetrica rispetto all'asse x. È compresa nella striscia di piano $0 \leqslant x \leqslant 1$. Inoltre, si deduce che anche $0 \leqslant x^4 \leqslant 1$ e quindi $-1 \leqslant x - x^4 \leqslant 1$, da cui $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Pertanto il grafico di $\mathscr{C}$ è limitato. Il gradiente omogenizzato è $\nabla = (-3X_0^2X_1 + 2X_0X_2^2;\ -X_0^3 + 4X_1^3;\ 2X_0^2X_2)$. L'unico punto singolare è (l'unico) punto improprio Y_∞. Ci aspettiamo che tale punto non abbia tangenti visibili nel piano affine poiché il grafico è limitato. Poiché il termine di grado massimo in y è y^2, non ci sono asintoti per $\mathscr{C}$ come ci aspettavamo. La curva passa per i punti $P(0,0)$, $Q(1,0)$, che essendo regolari e sul bordo del dominio, sono necessariamente a tangente verticale. I punti a tangente orizzontale sono $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt[6]{4}}\right)$. Il grafico della curva è il seguente:



]

(ix) $\mathscr{C}: \; y^2 = x^2 - x^4$;

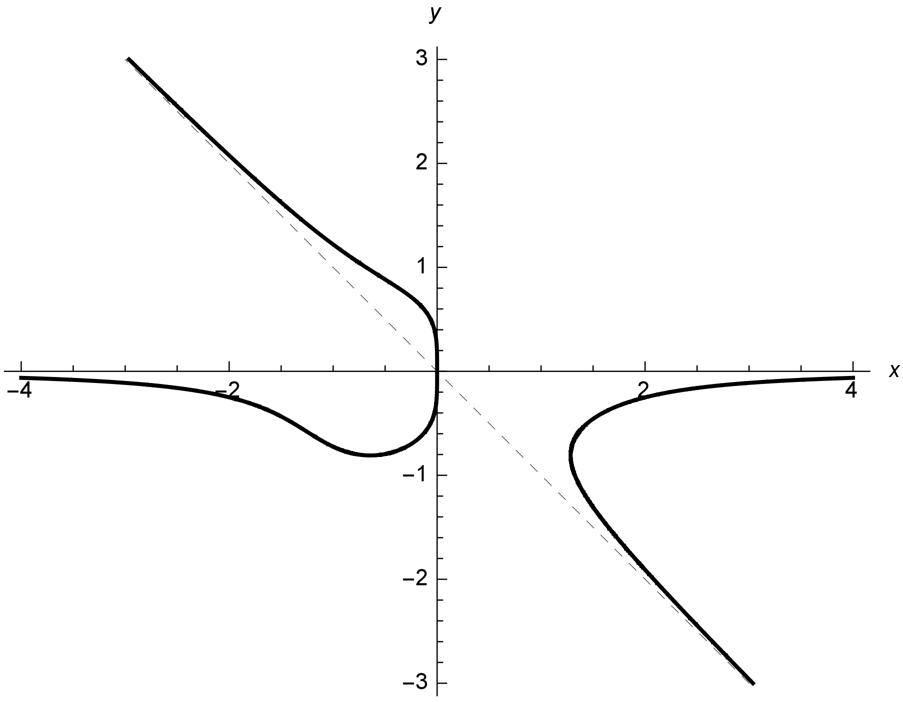
[La curva è simmetrica rispetto agli assi e quindi rispetto all'origine. È compresa nel rettangolo $[-1,1] \times [-1,1]$. I punti singolari sono l'origine, un nodo con tangenti $y = \pm x$, e il punto improprio (l'unico) Y_∞ che è una cuspide con tangente doppia $X_0 = 0$, a riprova del fatto che la curva è limitata. Per vedere ciò si utilizzi il cambio di variabili $\chi : \begin{cases} Y_1 = X_1 \\ Y_2 = X_0. \\ Y_0 = X_2 \end{cases}$ che porta il punto Y_∞ nell'origine. La curva passa per i punti $(\pm 1, 0)$ che hanno (necessariamente) tangenti verticali. I punti a tangente orizzontale sono $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2})$. Intersecando la curva con le rette di tipo $y = mx$ si ottiene $m^4x^4 + (m^2 - 1)x^2 = 0$. Questa dà la soluzione fissa $x = 0$ assieme ad altre due soluzioni, se e solo $-1 < m < 1$. Questo significa che il grafico della curva è compreso tra le due bisettrici e che in tale regione $\mathscr{C}$ interseca le rette passanti per l'origine in tre punti distinti, uno dei quali è l'origine. Il grafico è il seguente:



]

(x) $\mathscr{C}: \; y^4 + yx^3 + x = 0$;

[La cura non gode di simmetrie notevoli ed è liscia. I suoi punti impropri sono X_∞ con tangente l'asse x e $B[1, -1, 0]$ con tangente $y = -x$. Con la sostituzione $X_2 = 0$ nell'equazione di $\overline{\mathscr{C}}$ si ottiene $X_1 X_0^3 = 0$, per cui la molteplicità di intersezione dell'asintoto orizzontale con la curva nel punto all'infinito X_∞ è dispari e la curva si dispone dalla stessa parte rispetto all'asintoto. Con la sostituzione $X_1 = -X_2$ si ha similmente $X_1 X_0^3 = 0$ (molteplicità di intersezione dispari) che ci dice che la curva e dalla stessa parte rispetto all'asintoto $y = -x$. Insomma, i due punti impropri della curva sono dei flessi. I punti a tangente verticale sono l'origine e $(\sqrt[9]{\frac{256}{27}}, -\sqrt[9]{\frac{4}{27}})$. L'unico punto a tangente orizzontale è $(-\frac{1}{\sqrt[9]{54}}, -\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[9]{54}})$. Si osservi che la curva non può avere punti nel primo quadrante, quindi all'infinito sta sotto l'asse x. Inoltre, poiché $\mathscr{C}$ interseca l'altro asintoto solo nell'origine, il grafico è tutto sopra la retta $y = -x$. Infine le rette di tipo $y = mx$ intersecano il grafico in punti che risolvono l'equazione $m^4x^4 + mx^4 + x = 0$, ovvero $x[x^3(m^4 + m) + 1] = 0$. Questa produce la soluzione fissa $x = 0$ (cioè l'origine) e poi una seconda soluzione data dal fattore $x^3(m^4 + m) + 1 = 0$ se e solo se $m \neq 0$. Questo vuol dire che il grafico è confinato per le x positive tra i due asintoti e per le x negative, c'è un unico ramo che *abbraccia* dall'esterno i due asintoti. Il grafico è il seguente:



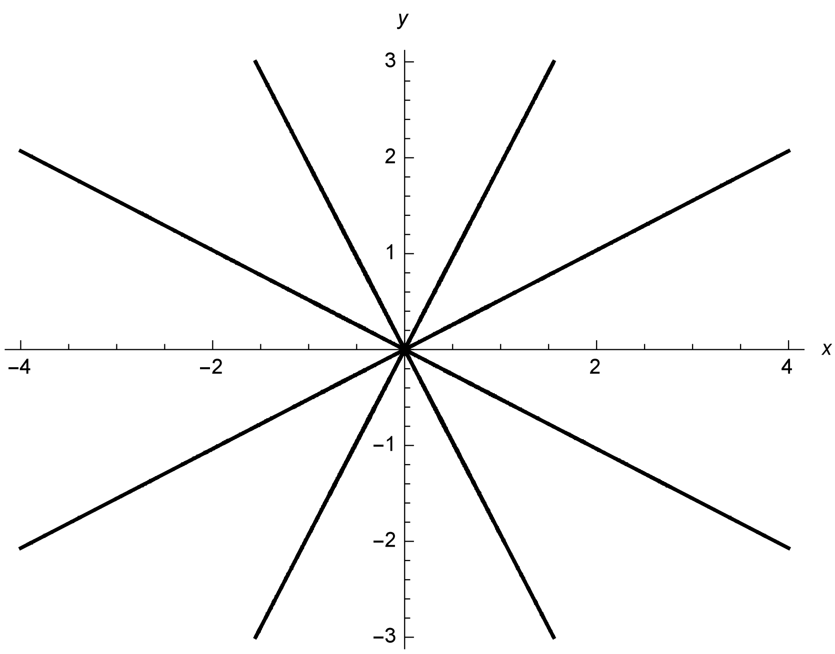
]

(xi) $\mathscr{C}:\ y^4 + x^4 + x^2y^2 = 0$;

[La curva ha per grafico solo l'origine, infatti è definita dalla somma di termini tutti positivi e manca il termine noto.]

(xii) $\mathscr{C}:\ y^4 + x^4 - 4x^2y^2 = 0$;

[La curva è definita da un polinomio omogeneo di grado 4 in x ed y. È un fatto generale (lo si dimostri) che allora la curva è costituita o dall'unione di rette oppure dalla sola origine. Per vedere ciò, dividiamo per x^4 e poniamo $m = \frac{y}{x}$. Si ottiene $m^4 - 4m^2 + 1 = 0$ che dà le quattro soluzioni $m = \pm\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$. Quindi il grafico della curva è costituito dalle quattro rette $y = \pm\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}\ x$. In particolare il suo grafico è simmetrico rispetto agli assi, bisettrici e origine.

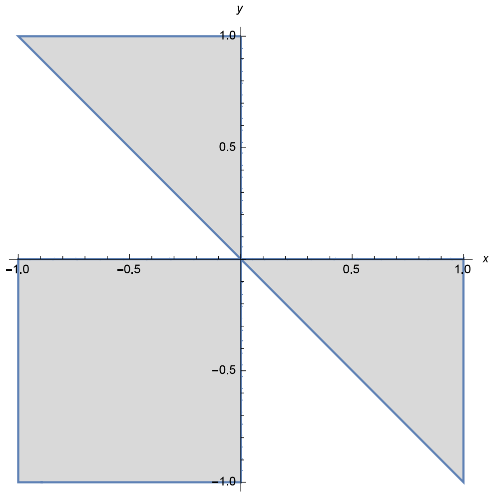


]

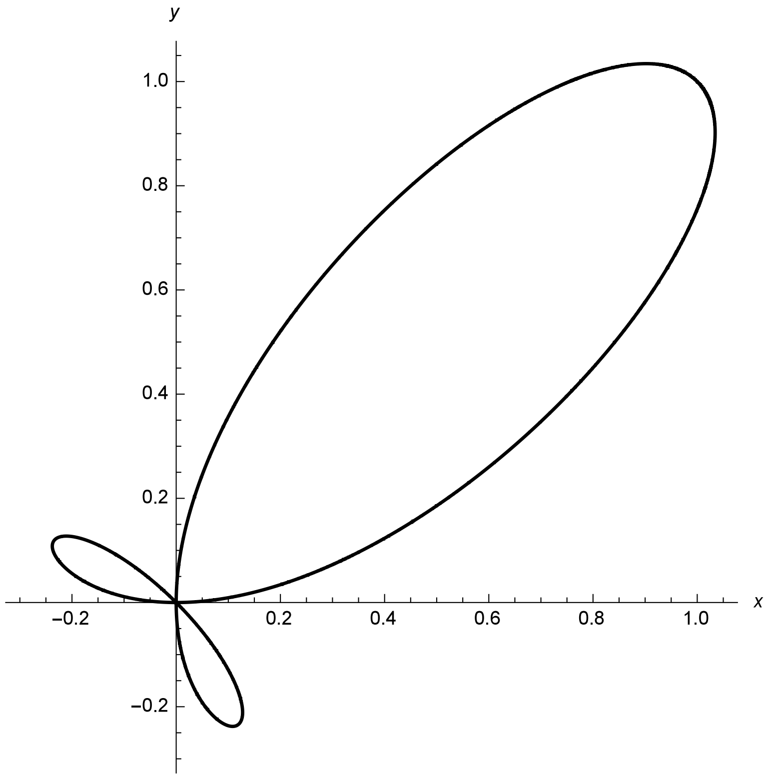
(xiii) $\mathscr{C}: \; x^4 + y^4 - 3xy^2 = 0;$ [si veda l'analoga curva studiata nelle *Note*]

(xiv) $\mathscr{C}: \; x^4 + y^4 - x^2y - y^2x = 0;$

[Risolvendo la disequazione $x^4 + y^4 = x^2y + y^2x = xy(x+y) \geqslant 0$, si ha che la curva non può svilupparsi nella parte colorata in figura:



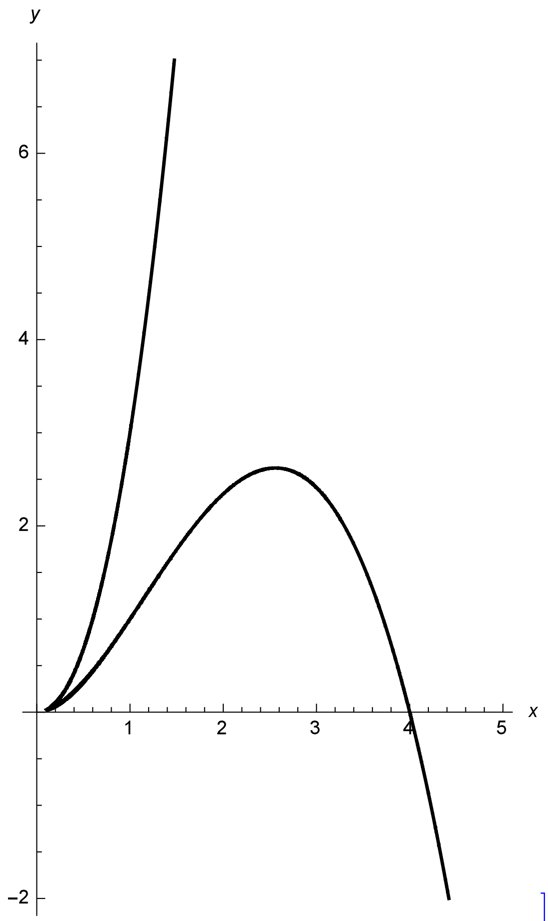
Intersecando la curva con le rette di tipo $y = mx$, con $m \neq 0$, si ottiene l'equazione $m^4x^4 - m^2x^3 - mx^3 = 0$ che dà le soluzioni $x = 0$ e $x = \frac{m^2+m}{m^4}$. Questo vuol dire che la curva incontra tutte le rette di quel tipo nell'origine e in un altro punto. Pertanto il grafico della curva è limitato. La curva non ha punti impropri, quindi nemmeno asintoti (come ci aspettavamo). L'origine è l'unico punto singolare ed ha complesso tangente dato da $xy(x+y) = 0$, esso è pertanto un punto triplo ordinario a tangenti distinte $x = 0$, $y = 0$ e $y = -x$. La curva è simmetrica rispetto alla bisettrice $y = x$ e passa per il punto $(1,1)$. Data la difficoltà, tralasciamo la determinazione dei punti a tangente orizzontale o verticale, ribadiamo però che sono nello stesso numero. Il grafico della curva è:



]

(xv) $\mathscr{C}:\ (y-2x^2)^2 = x^5$;

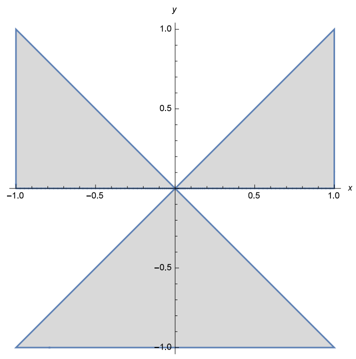
[La curva giace nel semipiano $x \geqslant 0$ e passa per i punti $(0,0)$ e $(4,0)$. Il solo punto improprio Y_∞ ha tangente che non si vede nel piano affine. I punti singolari sono l'origine con tangente l'asse x contato due volte e il punto Y_∞. La curva incontra le rette di tipo $x = k$, con $k > 0$, nei due punti di ordinata: $y = 2k^2 \pm \sqrt{k^5}$, una sempre positiva, l'altra, $2k^2 - \sqrt{k^5}$ è positiva per $0 < k < 4$. Da questo si deduce che l'origine è una cuspide di seconda specie. In particolare non ci sono punti a tangente verticale e deve evidentemente esserci un punto a tangente orizzontale di ascissa compresa tra 0 e 4. Con un po' di pazienza si trova esplicitamente $(\frac{64}{25}, \frac{2^{13}}{5^5})$. Tale curva è detta *curva a becco di Euler*:



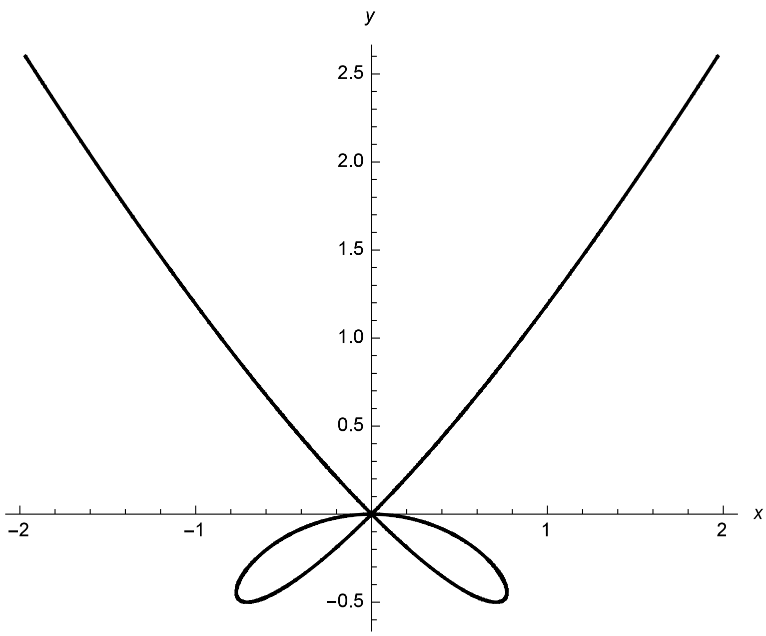
]

(xvi) $\mathscr{C}:\ x^4 + 2x^2y - 2y^3 = 0$;

[La curva è simmetrica rispetto all'asse y poiché nella sua equazione compaiono solo potenze pari della x. Risolvendo la disequazione $x^4 = 2y(y + x)(y - x) \geqslant 0$, si ottiene che la curva non può trovarsi nella parte colorata:



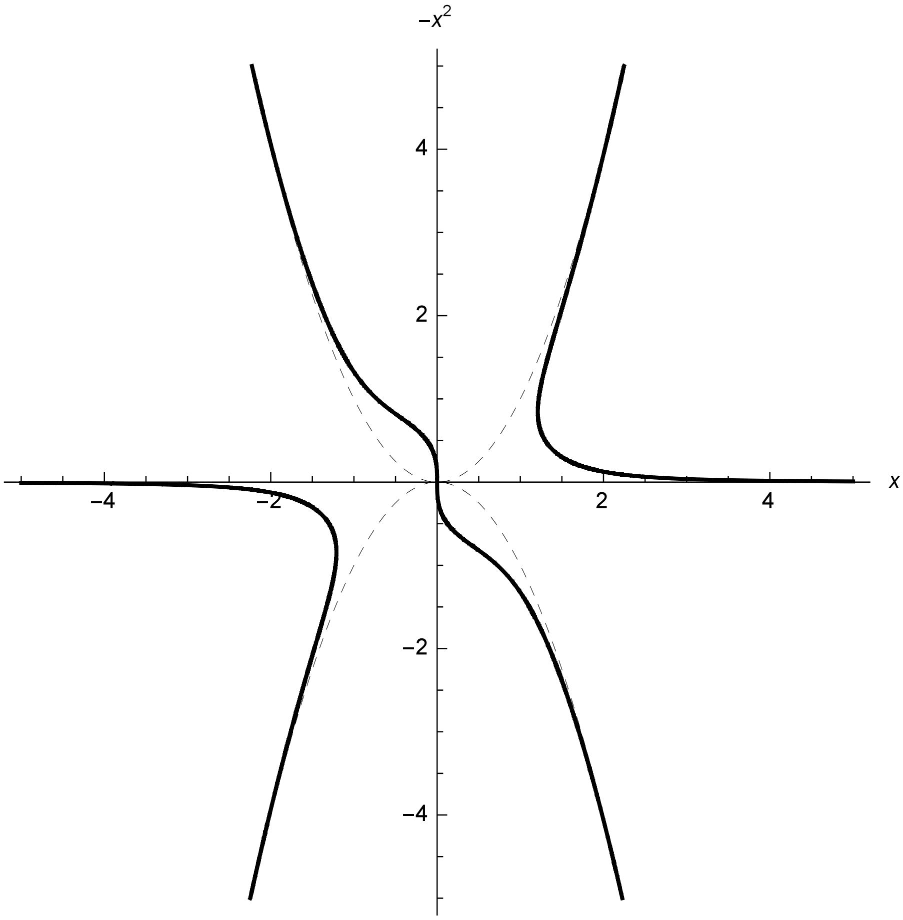
La curva interseca tutte le rette verticali (si lavora con un polinomio di terzo grado) e incontra le rette orizzontali del tipo $y = k$ se e solo se $k \geqslant -\frac{1}{2}$. In particolare i punti di intersezione sono 4 per i valori negativi di k, 2 per quelli positivi. L'origine è l'unico punto singolare (triplo ordinario) con tangenti $x = 0$, $y = \pm x$. La curva ha il solo punto improprio Y_∞ con tangente $X_0 = 0$: la curva è illimitata (per l'analisi precedente) e non ha asintoti. Il grafico è il seguente:



]

(xvii) $\mathscr{C}:\ x^4y - x - y^3 = 0$.

[La curva interseca tutte le rette verticali (è un polinomio di terzo grado in y) ed è simmetrica rispetto all'origine. Passa per l'origine, che ha tangente inflessionale l'asse y (con la sostituzione $x = 0$ si trova molteplicità di intersezione 3). La curva è liscia e ha l'asse x come asintoto rispetto a cui è da parti opposte. In prossimità dell'origine si comporta come la curva $x = -y^3$ (il termine di grado 5 va a zero più velocemente). Per valori x finiti e valori di $y \to \infty$, possiamo scrivere la curva come $x^4 - \frac{x}{y} = y^2$ che diventa $y = \pm x^2$. La curva ha allora quattro rami che si comportano all'infinito come tali parabole. Ci sono due punti a tangente verticale, uno nel primo e uno nel terzo quadrante. Il grafico è il seguente:



]

Esercizio 15. Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, si consideri la famiglia di curve:

$$\mathscr{C}_a : \; x^2 y = x + a.$$

(i) Provare che le curve $\mathscr{C}_a$ non hanno alcun punto in comune.

(ii) Provare che le $\mathscr{C}_a$ hanno un asintoto in comune.

(iii) Determinare i punti a tangente orizzontale delle $\mathscr{C}_a$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

(iv) Tracciare il grafico di $\mathscr{C}_a$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 16. Dimostrare che due circonferenze hanno al più due punti propri in comune.

[Sia da risolvere il sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0. \end{cases}$

Sottraendo membro a membro le due equazioni, si ottiene il sistema equivalente: $\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ (a - a')x + (b - b')y + (c - c') = 0. \end{cases}$ Dal teorema di Bézout abbiamo che una retta ed una circonferenza si incontrano in al più due punti, necessariamente propri.]