

**Sapienza Università di Roma – Corso di laurea in Ingegneria Elettrotecnica**  
**Geometria - A.A. 2018-2019**  
**Foglio n.9 – Basi e dimensione**

**Esercizio 1.** Sono dati i vettori  $v_1 = (1, 0, 0)$ ,  $v_2 = (2, 1, -1)$  e  $v_3 = (1, 2, 3)$  di  $\mathbb{R}^3$ . Dimostrare che  $v_1, v_2$  e  $v_3$  costituiscono una base di  $\mathbb{R}^3$ .

**Esercizio 2.** Determinare una base del sottospazio vettoriale  $U \subseteq \mathbb{R}^3$ , dove

$$U = \mathcal{L}((1, -3, -2), (0, -1, -1), (0, 2, 2), (0, 0, 0), (-1, 2, 1)).$$

[il primo e il secondo vettore costituiscono una base, la dimensione è 2]

**Esercizio 3.** Sia  $E = \mathcal{L}((1, 1, 0, 1), (2, 0, 1, 1)) \subseteq \mathbb{R}^4$ . Per quali valori di  $k$  si ha che  $(1, k, 2, -1) \in E$ ?

[per  $k = -3$ ]

**Esercizio 4.** Sia  $W \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  il sottospazio vettoriale costituito dalle matrici per cui la somma degli elementi della diagonale vale 0. Trovare una base di  $W$  e completarla ad una base di  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

[un base è costituita dalle matrici  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ;  
per ottenere una base di  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  basta aggiungere la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ]

**Esercizio 5.** Dimostrare che valgono le seguenti uguaglianze:

(i)  $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R});$

(ii)  $\mathcal{L}(2, 2x+2, 1, 2x+2+2x^2) = \mathcal{L}(x-x^2, 1+x, 1+x+x^2, x^2-x+1);$

(iii)  $\mathcal{L}((-1, 1, 1), (0, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0)) = \mathcal{L}((-1, 0, -1), (1, 0, 0), (-3, 0, 0), (1, 1, -1)).$

**Esercizio 6.** Verificare che  $\{(-1, 1), (2, 1)\}$  è una base di  $\mathbb{R}^2$ . Scrivere i vettori  $u = (2, 2)$ ,  $v = (0, 0)$ ,  $w = (\pi, \pi)$  e  $u + w$  come combinazione lineare di tali vettori.

**Esercizio 7.** Verificare che  $\{(-1, 1, 1), (2, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  è una base di  $\mathbb{R}^3$ . Scrivere i vettori  $u = (2, 1, -1)$ ,  $v = (1, -3, 0)$  e  $u + v$  come combinazione lineare di tale base.

**Esercizio 8.** Verificare che  $\{x+1, x^2-1, 2-x\}$  è una base di  $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ . Scrivere i vettori  $u = x^2+x+1$ ,  $v = -x-1$  e  $u+3v$  come combinazione lineare di tale base.

**Esercizio 9.** Verificare che  $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$  è una base di  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Scrivere i vettori  $u = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $v = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $w = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  e  $u - v + 2w$  come combinazione lineare di tale base.

**Esercizio 10.** Determinare una base e la dimensione del sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}[x]$  definito come

$$U = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg f(x) \leq 2, f(-2) = 0\} \cup \{0\}.$$

[una base è  $\{x^2 - 4, x + 2\}$ , la dimensione è 2]

**Esercizio 11.** Sia dato  $S$  il sottospazio di  $\mathbb{R}[x]$  definito da

$$S = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid f(-1) = f(1) = 0, \deg f(x) \leq 4\} \cup \{0\}.$$

Determinare una base di  $S$  e completarla ad una base di  $\mathbb{R}_{\leq 4}[x]$ .

[una base è  $\{x^4 - x^2, x^4 - 1, x^3 - x\}$ , la dimensione è 3;  
per ottenere una base dello spazio ambiente si aggiungano i vettori  $x^4$  e  $x$ ]

**Esercizio 12.** Trovare una base del sottospazio

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & -a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

[una base è costituita dalle matrici  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ; la dimensione è 2]

**Esercizio 13.** Trovare una base di

$$W = \{ b + ax + ax^2 \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \mid a, b \in \mathbb{R} \}.$$

[una base è costituita dai polinomi 1 e  $x + x^2$ ]

**Esercizio 14.** Nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}_{\leq 3}[X]$  si considerino i seguenti sottospazi:

$$U = \{ f(X) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[X] \mid f(1) = 0 \},$$

$$V = \{ a + (2a - b)X + (a - b)X^3 \mid a, b \in \mathbb{R} \}.$$

Determinare una loro base.

[un base di  $U$  è  $\{ x^3 - 1, x^2 - 1, x - 1 \}$ ; una base di  $V$  è  $\{ 1 + 2X + X^3, -X - X^3 \}$ ]

**Esercizio 15.** Sia  $n$  un intero positivo. Determinare una base dei sottospazi  $Sym_n(\mathbb{R})$ ,  $ASym_n(\mathbb{R})$  e  $Diag_n(\mathbb{R})$ . Quanto valgono le loro dimensioni?

**Esercizio 16.** Sia  $k \in \mathbb{R}$ . Si considerino i vettori  $u = (2, k, 1)$ ,  $v = (k, 2, 0)$ ,  $w = (0, 0, k)$  e  $s = (k, k, k)$  di  $\mathbb{R}^3$  e sia  $F$  il sottospazio da essi generato. Calcolare la dimensione di  $F$  al variare di  $k \in \mathbb{R}$ .

[per  $k \neq 0, 2$  la dimensione è 3, per  $k = 0$  oppure  $k = 2$  invece è 2]

**Esercizio 17.** Si considerino i polinomi  $f(x) = x^2 - 1$ ,  $g(x) = -kx^2 + 1$  e  $h(x) = kx^2 + k$  di  $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$  e sia  $B$  il sottospazio da essi generato. Per quali valori di  $k$  i polinomi  $f(x), g(x)$  e  $h(x)$  sono una base di  $B$ ? Calcolare la dimensione di  $B$  al variare di  $k \in \mathbb{R}$ . Per quali valori di  $k$  il polinomio  $a(x) = 2 - kx + kx^2$  appartiene a  $B$ ?

[i tre polinomi non sono base di  $B$  per nessun valore di  $k$  poiché sono linearmente dipendenti per qualsiasi valore di  $k$ ;  $B$  ha dimensione 2 per ogni valore di  $k$ ; il polinomio  $a(x)$  appartiene a  $B$  solo per  $k = 0$ , esso è infatti multiplo del secondo generatore  $g(x)$ , per gli altri valori di  $k \neq 0$ , i tre generatori non possono generare  $a(x)$  in quanto hanno tutti e tre il coefficiente di  $x$  nullo.]

**Esercizio 18.** Sia data la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ . Trovare una base e la dimensione del sottospazio  $U = \{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AX = XA \}$  di  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

[una base è costituita dalle matrici  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ; la dimensione è 2]

**Esercizio 19.** Determinare la dimensione ed una base dello spazio vettoriale

$$V = \mathcal{L}(-x + 1, 2x - 2, x^2 - 1, 6) \subseteq \mathbb{R}[x].$$

Per quali valori di  $\lambda \in \mathbb{R}$  si ha  $\lambda x^2 - 1 \in V$ ?

[ $V$  ha dimensione 3, si scarti il primo generatore;  $\lambda = 1$ ]

**Esercizio 20.** Determinare una base e la dimensione dei seguenti sottospazi vettoriali:

(i)  $\mathcal{L}((-1, 1), (0, 0), (1, 0), (-1, 2)) \subseteq \mathbb{R}^2$ ; [ $\{(1, -1), (1, 0)\}$ ]

(ii)  $\mathcal{L}((\pi, \pi), (e, e)) \subseteq \mathbb{R}^2$ ; [ $\{(1, 1)\}$ ]

(iii)  $\mathcal{L}((\pi, e), (e, -\pi)) \subseteq \mathbb{R}^2$ ;

(iv)  $\mathcal{L}((-1, 1, 1), (0, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 3)) \subseteq \mathbb{R}^3$ ; [ $\{(-1, 1, 1), (1, 1, 3)\}$ ]

(v)  $\mathcal{L}((-1, 1, 1), (0, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0)) \subseteq \mathbb{R}^3$ ; [la base canonica di  $\mathbb{R}^3$ ]

(vi)  $\mathcal{L}((-1, -1, -1), (0, 0, 0), (-1, -1, 1), (-1, 1, 1), (1, 1, 1)) \subseteq \mathbb{R}^3$ ;

- (vii)  $\mathcal{L}(1, x^3 + x + 1, -1 - x + x^2, x^3 - x^2 + 2x + 3, 2x^2 - 2x - 2) \subseteq \mathbb{R}[x]$ ;
- (viii)  $\mathcal{L}(2, 2x + 2, 1, 2x + 2 + 2x^2) \subseteq \mathbb{R}[x]$ ; [1, x, x^2]
- (ix)  $\mathcal{L}(\pi + e, x + 2, x - 2 + 2000x^2) \subseteq \mathbb{R}[x]$ ;
- (x)  $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & e \\ 0 & e \end{pmatrix}\right) \subseteq M_2(\mathbb{R})$ ; [ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ]
- (xi)  $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \subseteq M_2(\mathbb{R})$ ;
- (xii)  $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \subseteq M_{2,3}(\mathbb{R})$ .

**Esercizio 21.** Per quali valori di  $k \in \mathbb{R}$  valgono le seguenti uguaglianze?

- (i)  $\mathcal{L}(1 + x, kx - 1) = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ ;  
[nessun valore di  $k$ , lo spazio a sinistra ha infatti al più due generatori mentre lo spazio a sinistra ha dimensione 3]
- (ii)  $\mathcal{L}((k, 1, 1), (0, 0, 0), (1, k, 1), (1, 1, k)) = \mathbb{R}^3$ ; [per  $k \neq 1, -2$ ]
- (iii)  $\mathcal{L}(x, kx - 1, kx^2 - 1, kx^{100} + 1) = \mathbb{R}[x]$ .  
[nessun valore di  $k$  poiché lo spazio a destra non è finitamente generato]

**Esercizio 22.** Siano  $V$  uno spazio vettoriale reale e  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  una sua base. Dimostrare che anche  $\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_1 + v_4\}$  è base di  $V$ . Stabilire poi se  $\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_1 - v_4\}$  è base di  $V$ .

**Esercizio 23.** Siano  $V$  uno spazio vettoriale reale e  $\{v_1, v_2, v_3\}$  una sua base. Dimostrare che anche  $\{v_1, v_2, v_3 + \lambda v_1 + \mu v_2\}$  è base di  $V$ , per ogni  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

**Esercizio 24.** In ciascuno dei seguenti casi, trovare una base del sottospazio e completarla ad una base dello spazio accanto indicato:

- (i)  $\mathcal{L}((0, 0), (1, 0), (\pi, 0)) \subseteq \mathbb{R}^2$ ; [(1, 0), si aggiunga (0, 1)]
- (ii)  $\mathcal{L}((1, 0, 1), (-1, 0, -1), (0, 0, 0), (2, 0, 2)) \subseteq \mathbb{R}^3$ ;  
[(1, 0, 1), si aggiungano (1, 0, 0) e (0, 1, 0)]
- (iii)  $\mathcal{L}((0, 1, 1, 1), (1, 0, -1, 0)) \subseteq \mathbb{R}^4$ ;
- (iv)  $\mathcal{L}(x + 2, -x^2 + 3, 0) \subseteq \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ ; [ $x + 2, x^2 - 3$ , si aggiungano  $x$  e  $x^3$ ]
- (v)  $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right) \subseteq M_2(\mathbb{R})$ .

$$\left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \text{ si aggiungano } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

**Esercizio 25.** Siano dati i vettori  $u = (1, 2, 1)$ ,  $v = (1, 0, 2)$  e  $w = (1, k, -1)$  di  $\mathbb{R}^3$ . Per quali valori di  $k$  i tre vettori formano una base di  $\mathbb{R}^3$ ? Determinare la dimensione di  $\mathcal{L}(u, v, w)$  e di  $\mathcal{L}(v, w)$  al variare di  $k \in \mathbb{R}$ .

[per  $k \neq 6$  sono una base;  
per  $k \neq 6$  si ha  $\dim \mathcal{L}(u, v, w) = 3$ , per  $k = 6$  invece la dimensione è 2;  
 $\mathcal{L}(v, w) = 2$ , per ogni valore di  $k$ ]

**Esercizio 26.** Determinare una base e la dimensione del sottospazio vettoriale  $W \subseteq \mathbb{R}^4$ , dove

$$W = \mathcal{L}((2, -1, 1, 1), (0, 0, 0, 0), (1, -1, 1, 1), (1, 0, 0, 0), (4, -2, 2, 2)).$$

[il primo e il terzo vettore costituiscono una base, la dimensione è 2]

**Esercizio 27.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale finitamente generato e sia  $W$  un sottospazio vettoriale di  $V$ . Provare che  $\dim W \leq \dim V$ . Dimostrare inoltre che  $W = V$  se e solo se  $\dim W = \dim V$ .