Sapienza Università di Roma – Corso di laurea in Ingegneria Elettrotecnica
Geometria - A.A. 2018-2019
Foglio n.8 – Sottospazi vettoriali

Esercizio 1. Stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ sono sottospazi vettoriali:

(i) $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = 0 \right\}$;

(ii) $B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x - y = 0 \right\}$;

(iii) $C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2x - y = 3 \right\}$;

(iv) $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2x - y = x + 3y = 0 \right\}$;

(v) $E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, xy = 0 \right\}$;

(vi) $F = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \right\}$;

(vii) $G = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x + y \geqslant 0 \right\}$;

(viii) $H = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, xy \geqslant 0 \right\}$;

(ix) $I = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x + \log y = 0 \right\}$;

(x) $M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 > 0 \right\}$;

(xi) $N = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 > 0 \right\}$.

[sono sottospazi $A,\ B,\ D$]

Esercizio 2. Sia $W \subseteq \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici per cui la somma degli elementi della diagonale vale 0. Provare che W è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Esercizio 3. Per quali valori dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$ i seguenti sistemi lineari hanno per soluzioni un sottospazio vettoriale non banale di $\mathbb{R}^n$?

(i) $\begin{cases} x + y + kz = 0 \\ 2x + 3y + 4hz = 0 \\ 3x + 5y + 7z = 0 \\ 4x + 7y + 10kz = 0 \\ 5x + 9y + 13z = h \end{cases}$ con $n = 3$; [per nessun valore]

(ii) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 3y = h \\ 2x + y = k \end{cases}$ con $n = 3$; [per nessun valore]

(iii) $\begin{cases} -2hx + 3z = 0 \\ -4hx - 2y + z = 0 \\ 2hx + 2y + 2z = 0 \\ -10hx - 6y = 0 \end{cases}$ con $n = 3$; [per $h = 0$]

(iv) $\begin{cases} 2kx_1 + 3x_2 + x_3 - kx_4 - 2x_5 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 + 5x_5 = k \\ 8x_1 + 3kx_2 + x_3 - 7x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$ con $n = 5$; [per $k = 0$]

(v) $\begin{cases} hx_1 - 2kx_2 + hx_3 - kx_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$ con $n = 5$; [per ogni valore di h e k]

(vi) $\begin{cases} 2x_1 + hx_2 - kx_5 = 0 \\ x_1 + kx_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2kx_5 = 0 \end{cases}$ con $n = 5$; [per ogni valore di h e k]

Esercizio 4. Sia dato

$$U = \{\, f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg f(x) \leqslant 2,\ f(-2) = 0 \,\} \cup \{\, 0 \,\}.$$

Verificare che U è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$. Stabilire per quali valori dei parametri $h, k, \alpha \in \mathbb{R}$, i seguenti polinomi sono in U:

$$f(x) = (x+2)(3x-1) + k + 1 \qquad g(x) = hx^2 + x + 2 + h \qquad p(x) = \alpha(x^3 + 1 - x) + 2 + x.$$

Scrivere infine la forma generale degli elementi di U.

[per $k = -1,\ h = 0,\ \alpha = 0;\ f(x) = ax^2 + bx + (4a - 2b)$]

Esercizio 5. Sia dato S il sottoinsieme di $\mathbb{R}[x]$ definito da

$$S = \{\, f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid f(-1) = f(1) = 0,\ \deg f(x) \leqslant 4 \,\} \cup \{\, 0 \,\}.$$

Provare che S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$. Dire se $f(x) = x(x^2+1)(x^2-1) \in S$. Per quali valori dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$ si ha $\mathcal{L}(hx^3 + kx + k + 1) \subseteq S$? Scrivere infine la forma generale degli elementi di S. [$f(x) \notin S$; $h = 1,\ k = -1$; $g(x) = (-c-e)x^4 - dx^3 + cx^2 + dx + e$]

Esercizio 6. Sia Z il sottospazio di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generato dalle matrici $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Per quali valori di k la matrice $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ appartiene a $\mathcal{L}(A_1, A_2)$? [$k = -3$]

Esercizio 7. Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Dimostrare che l'insieme

$$W = \{\, X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AX = XA \,\}$$

è sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Questo sottospazio è detto il *centralizzante* di A in $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Esercizio 8. Dimostrare che l'insieme

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & -a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

è sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$.

Esercizio 9. Dimostrare che l'insieme

$$W = \left\{\, b + ax + ax^2 \in \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x] \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \,\right\}$$

è sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$.

Esercizio 10. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}_{\leqslant 3}[X]$ costituito dai polinomi a coefficienti reali di grado al più 3 e dal polinomio nullo, si considerino i seguenti sottoinsiemi:

$$U = \{\, f(X) \in \mathbb{R}_{\leqslant 3}[X] \mid f(1) = 0 \,\},$$

$$V = \left\{\, a + (2a-b)X + (a-b)X^3 \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \,\right\},$$

$$W = \{\, f(X) \in \mathbb{R}_{\leqslant 3}[X] \mid f(-1) = 2 \,\}.$$

(i) Si verifichi che U e V sono sottospazi di $\mathbb{R}_{\leqslant 3}[X]$.

(ii) Stabilire se anche W è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_{\leqslant 3}[X]$.

[W non è sottospazio poiché non contiene il polinomio nullo]