

Sapienza Università di Roma
Corso di laurea in Ingegneria Energetica
Geometria - A.A. 2015-2016
Foglio n.8 – Sottospazi vettoriali
prof. Cigliola

Esercizio 1. Stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R}^2 sono sottospazi vettoriali:

- (i) $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \};$
- (ii) $B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0 \};$
- (iii) $C = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 3 \};$
- (iv) $D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = x + 3y = 0 \};$
- (v) $E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0 \};$
- (vi) $F = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0 \};$
- (vii) $G = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 0 \};$
- (viii) $H = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0 \};$
- (ix) $I = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + \log y = 0 \};$
- (x) $M = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 > 0 \};$
- (xi) $N = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 0 \}.$

[sono sottospazi A, B, D]

Esercizio 2. Sia $W \subseteq \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici per cui la somma degli elementi della diagonale vale 0. Provare che W è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Esercizio 3. Per quali valori dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$ i seguenti sistemi lineari hanno per soluzioni un sottospazio vettoriale non banale di \mathbb{R}^n ?

$$(i) \begin{cases} x + y + kz = 0 \\ 2x + 3y + 4hz = 0 \\ 3x + 5y + 7z = 0 \\ 4x + 7y + 10kz = 0 \\ 5x + 9y + 13z = h \end{cases} \quad \text{con } n = 3; \quad \text{[per nessun valore]}$$

$$(ii) \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 3y = h \\ 2x + y = k \end{cases} \quad \text{con } n = 3; \quad \text{[per nessun valore]}$$

$$(iii) \begin{cases} -2hx + 3z = 0 \\ -4hx - 2y + z = 0 \\ 2hx + 2y + 2z = 0 \\ -10hx - 6y = 0 \end{cases} \quad \text{con } n = 3; \quad \text{[per } h = 0\text{]}$$

$$(iv) \begin{cases} 2kx_1 + 3x_2 + x_3 - kx_4 - 2x_5 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 + 5x_5 = k \\ 8x_1 + 3kx_2 + x_3 - 7x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \quad \text{con } n = 5; \quad [\text{per } k = 0]$$

$$(v) \begin{cases} hx_1 - 2kx_2 + hx_3 - kx_4 - 3x_5 = 0 \end{cases} \quad \text{con } n = 5; \quad [\text{per ogni valore di } h \text{ e } k]$$

$$(vi) \begin{cases} 2x_1 + hx_2 - kx_5 = 0 \\ x_1 + kx_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2kx_5 = 0 \end{cases} \quad \text{con } n = 5; \quad [\text{per ogni valore di } h \text{ e } k]$$

Esercizio 4. Sia dato

$$U = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg f(x) \leq 2, f(-2) = 0 \} \cup \{ 0 \}.$$

Verificare che U è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$. Stabilire per quali valori dei parametri $h, k, \alpha \in \mathbb{R}$, i seguenti polinomi sono in U :

$$f(x) = (x+2)(3x-1) + k + 1 \quad g(x) = hx^2 + x + 2 + h \quad p(x) = \alpha(x^3 + 1 - x) + 2 + x.$$

Scrivere infine la forma generale degli elementi di U .

$$[\text{per } k = -1, h = 0, \alpha = 0; f(x) = ax^2 + bx + (4a - 2b)]$$

Esercizio 5. Sia dato S il sottoinsieme di $\mathbb{R}[x]$ definito da

$$S = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid f(-1) = f(1) = 0, \deg f(x) \leq 4 \} \cup \{ 0 \}.$$

Provare che S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$. Dire se $f(x) = x(x^2+1)(x^2-1) \in S$. Per quali valori dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$ si ha $\mathcal{L}(hx^3 + kx + k + 1) \subseteq S$? Scrivere infine la forma generale degli elementi di S .

$$[f(x) \in S; h = 1, k = 0; g(x) = (-c - e)x^4 - dx^3 + cx^2 + dx + e]$$

Esercizio 6. Sia Z il sottospazio di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generato dalle matrici $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e

$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Per quali valori di k la matrice $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ appartiene a $\mathcal{L}(A_1, A_2)$?

$$[k = 3]$$

Esercizio 7. Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Dimostrare che l'insieme

$$W = \{ X \in M_2(\mathbb{R}) \mid AX = XA \}$$

è sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Questo sottospazio è detto il *centralizzante* di A in $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Esercizio 8. Dimostrare che l'insieme

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & -a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

è sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$.

Esercizio 9. Dimostrare che l'insieme

$$W = \{ b + ax + ax^2 \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

è sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$.

Esercizio 10. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}_{\leq 3}[X]$ costituito dai polinomi a coefficienti reali di grado al più 3 e dal polinomio nullo, si considerino i seguenti sottoinsiemi:

$$U = \{ f(X) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[X] \mid f(1) = 0 \},$$

$$V = \{ a + (2a - b)X + (a - b)X^3 \mid a, b \in \mathbb{R} \},$$

$$W = \{ f(X) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[X] \mid f(-1) = 2 \}.$$

- (i) Si verifichi che U e V sono sottospazi di $\mathbb{R}_{\leq 3}[X]$.
- (ii) Stabilire se anche W è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_{\leq 3}[X]$.

[W non è sottospazio poiché non contiene il polinomio nullo]