Sapienza Università di Roma
Corso di laurea in Ingegneria Energetica
Geometria - A.A. 2015-2016
Foglio n.5 – Rango
prof. Cigliola

Esercizio 1. Data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} h & -2 \\ 2 & h \end{pmatrix}$$
dire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando la risposta.

(i) $\operatorname{rk} A = 2$, per ogni valore di $h \in \mathbb{R}$.

[vero: poiché il determinante vale $h^2 + 4$, sempre positivo, la matrice ha rango 2 per ogni valore di h]

(ii) $\det(A) = -4$ per $h = 0$. [vero]

Esercizio 2. Al variare del parametro reale k, calcolare il rango delle matrici:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} k & k-1 & k \\ 0 & 2k-2 & 0 \\ 1 & k-1 & 2-k \end{pmatrix}$$

[Il determinante della matrice A vale $2k-3$. Per $k \neq 3/2$ il rango di A vale 3, altrimenti vale 2. Il determinante della matrice B vale $-2k(k-1)^2$. Per $k \neq 0, 1$ il rango di B vale 3, per $k = 0$ vale 2, per $k = 1$ vale 1.]

Esercizio 3. Determinare il rango delle seguenti matrici a coefficienti reali:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 100 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \pi & \pi^2 \\ \pi^2 & \pi^3 \end{pmatrix}$$

[3, 3, 2, 1]

Esercizio 4. Provare che la seguente matrice ha rango 2:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5. Al variare del parametro k, determinare il rango delle seguenti matrici:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ k & k & k \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & k & 0 & 2 \\ k & 2 & 0 & k \\ 1 & 0 & k & k \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -k & 0 \\ k & 0 & -k & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

[la matrice A ha rango 2 per ogni valore di k,
la matrice B ha rango 3 per $k \neq \pm 2$, ha rango due altrimenti,
la matrice C ha rango 3 per $k \neq 0$, ha rango 2 per $k = 0$,
la matrice D ha rango 3 per $k \neq 1, -2$, rango 1 per $k = 1$, rango 2 per $k = -2$.]