Sapienza Università di Roma - Facoltà I3S
Corso di Laurea in Statistica Economia Finanza e Assicurazioni
Corso di Laurea in Statistica Economia e Società
Corso di Laurea in Statistica gestionale
Matematica II corso - A.A. 2017-2018 – prof. Cigliola
Foglio n.5 – Funzioni elementari

Esercizio 1. Siano f e g due funzioni iniettive. Provare che anche $g \circ f$ è iniettiva.

Esercizio 2. Siano f e g due funzioni suriettive. Provare che anche $g \circ f$ è suriettiva.

Esercizio 3. Sia $f : A \to B$ una funzione. Provare che per ogni $X, Y \subseteq A$ risulta:

$$f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y).$$

Esercizio 4. Rappresentare graficamente la funzione $f(x) = [x^2 - 2]$, dopo averne precisato il dominio. Si calcoli inoltre $\operatorname{Im} f$. $[\operatorname{Im} f = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geqslant -2\}]$

Esercizio 5. Sia data

$$f(x) = \sqrt{1 + \log x}$$

(i) Trovare il dominio di f. $[x \geqslant \frac{1}{e}]$

(ii) Determinare $\operatorname{Im} f$. $[\operatorname{Im} f = [0, +\infty)]$

(iii) Stabilire se f è invertibile. [no, non è suriettiva ma iniettiva]

(iv) Definire opportunamente, se possibile, una funzione che inverte f.
[Ridefinendo f come $\tilde{f} : [\frac{1}{e}, +\infty) \to [0, +\infty)$, si trova che essa è invertibile e la sua inversa è $\tilde{f}^{-1}(y) = e^{y^2-1}$]

(v) Provare che f è strettamente crescente.

(vi) Calcolare $\sup f$, $\inf f$, $\sup\limits_{[1,e]} f$, $\inf\limits_{[1,e)} f$, $\max\limits_{[1,e]} f$ e $\min\limits_{(1,e]} f$. $[+\infty,\ 0,\ \sqrt{2},\ 1,\ \sqrt{2}$, non esiste$]$

Esercizio 6. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \\ \operatorname{arctg} x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

(i) Tracciare il grafico di f.

(ii) Calcolare l'immagine di f. $[[0, e)]$

(iii) Calcolare $\sup f$ e $\inf f$.

(iv) Provare che f non è iniettiva.

Esercizio 7. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{2} & \text{se } x < -1 \\ x & \text{se } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ \dfrac{x+1}{2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

(i) Tracciare il grafico di f.

(ii) Provare che f è invertibile e trovare la sua inversa.

Esercizio 8. Sia data la funzione

$$f(x) = \log x.$$

(i) Calcolare la controimmagine di $[0,1]$. $[\,[1,e]\,]$

(ii) Calcolare la controimmagine di $(-3,+\infty)$. $[\,(e^{-3},+\infty)\,]$

(iii) Calcolare l'immagine diretta sotto f di $(3,14]$. $[\,(\log 3,\ \log 14]\,]$

Esercizio 9. Sia data la funzione

$$f(x) = \sqrt{x+1}.$$

(i) Calcolare il dominio di f. $[\,x \geqslant -1\,]$

(ii) Calcolare la controimmagine di $(0,1]$. $[\,(-1,0]\,]$

(iii) Calcolare la controimmagine di $(-3,+\infty)$. $[\,[-1,+\infty)\,]$

(iv) Calcolare l'immagine diretta di $\mathbb{N}$.

Esercizio 10. Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{x-|x|}{2}.$$

(i) Tracciare il grafico di f.

[Si osservi che sviluppando il valore assoluto, la funzione f può essere definita a tratti come

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \geqslant 0 \\ x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$]

(ii) Calcolare la controimmagine di $(-1,1)$. $[\,(-1,+\infty)\,]$

(iii) Calcolare l'immagine diretta sotto f di $\mathbb{Z}$. [tutti i numeri interi < 0]

Esercizio 11. Trovare, se esistono, le inverse delle seguenti funzioni, specificandone insieme di partenza e di arrivo:

(i) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

(ii) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

(iii) $f(x) = x - |x|$.

Esercizio 12. Si consideri la funzione

$$f(x) = 3 - 2x.$$

(i) Dimostrare che f è biunivoca.

(ii) Provare che f è decrescente.

(iii) Dimostrare che f è invertibile e calcolare la sua inversa.

(iv) Risolvere l'equazione

$$f(2x) - 2f(x) = f(x^2) + (f(x))^2.$$

$[\,\frac{6\pm\sqrt{6}}{2}\,]$

Esercizio 13. Dimostrare che la funzione

$$f(x) = \frac{1}{|x|}$$

è crescente in $(-\infty,0)$ e decrescente in $(0,+\infty)$.

Esercizio 14. Sono date le funzioni

$$f(x) = \frac{x-1}{2} \qquad\qquad g(x) = 2x - 1$$

Calcolare le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$ precisandone il dominio.

Esercizio 15. Sono date le funzioni

$$f(x) = x^2 - 1 \qquad\qquad g(x) = 3x + 2$$

Calcolare le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$ precisandone il dominio.

Esercizio 16. Costruire una funzione che ha per dominio l'insieme $\mathbb{R} \setminus \{1,\ 2,\ 3\}$.

Esercizio 17. Verificare che la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$$

è pari. Trovare poi la controimmagine di $y \in \mathbb{R}$.

Esercizio 18. Calcolare il dominio delle seguenti funzioni:

(i) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$ $\quad [\,(-3, 3)\,]$

(ii) $f(x) = \sqrt{x + 1 - \sqrt{|1 - x^2|}}$ $\quad [\,\{-1\} \cup [0, +\infty)\,]$

(iii) $f(x) = \sqrt{x + 4 - \sqrt{x^2 - 4}}$ $\quad [\,[-\frac{5}{2}, -2] \cup [2, +\infty)\,]$

(iv) $f(x) = \dfrac{1}{x^4 + 3x^2 + 2}$ $\quad [\,\mathbb{R}\,]$

(v) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x + \cos + 1}$ $\quad [\,x \neq 2k\pi,\ \ x \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\,]$

(vi) $f(x) = \dfrac{x}{|\sin x| + |\cos x|}$ $\quad [\,x \neq \pm\frac{\pi}{4} + h\pi\,]$

(vii) $f(x) = \sqrt{2|\sin x| - \sqrt{3}}$ $\quad [\,\frac{\pi}{3} + k\pi \leqslant x \leqslant \frac{2}{3}\pi + k\pi\,]$

(viii) $f(x) = \sqrt{\dfrac{\sin x}{\cos x + 1}}$ $\quad [\,2k\pi \leqslant x < \pi + 2k\pi\,]$

(ix) $f(x) = 2^x + 3^{2x-1} + 5^{\frac{1}{x}}$ $\quad [\,\mathbb{R} \setminus \{0\}\,]$

(x) $f(x) = \log \dfrac{x - 2}{x}$ $\quad [\,(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)\,]$

(xi) $f(x) = \sqrt{2^{x+1} - 3^{x+2}}$ $\quad [\,(-\infty, \frac{\log 9 - \log 2}{\log 2 - \log 3}]\,]$

(xii) $f(x) = \sqrt{\log^2_{\frac{1}{2}} x + 3 \log_{\frac{1}{2}} x - 4}$ $\quad [\,(0, \frac{1}{2}] \cup [16, +\infty)\,]$

(xiii) $f(x) = (1 - x^4)^{7 + \sqrt{2}}$ $\quad [\,\mathbb{R}\,]$

(xiv) $f(x) = \arcsin \dfrac{x}{4}$ $\quad [\,[-4, 4]\,]$

(xv) $f(x) = \arctan \dfrac{x - 1}{x - 3}$ $\quad [\,\mathbb{R} \setminus \{3\}\,]$

(xvi) $f(x) = \arccos [\log(x - 1) - \log x]$ $\quad [\,[\frac{e}{e-1}, +\infty)\,]$