Sapienza Università di Roma - Facoltà I3S
Corso di Laurea in Statistica Economia Finanza e Assicurazioni
Corso di Laurea in Statistica Economia e Società
Corso di Laurea in Statistica gestionale
Matematica II corso - A.A. 2017-2018 – prof. Cigliola
Foglio n.4 – Equazioni e disequazioni

Esercizio 1. Risolvere le disequazioni seguenti:

(i) $\dfrac{x}{x-6} < \dfrac{x+3}{6} + \dfrac{x+6}{6-x}.$ $\qquad [-3 < x < 6 \ \vee \ x > 18]$

(ii) $\dfrac{2}{1-x^2} + \dfrac{6}{x^4-1} > 1 - \dfrac{3}{x^2+1}.$ $\qquad [-\sqrt{2} < x < -1 \ \vee 1 < x < \sqrt{2}]$

(iii) $x^4 - 12x^2 + 32 < 0$ $\qquad [-2\sqrt{2} < x < -2 \ \vee \ 2 < x < 2\sqrt{2}]$

(iv) $\dfrac{x^2+1}{x^3+4x^2} + \dfrac{x+2}{x+4} \geqslant \dfrac{x-2}{x^2+4x}$ $\qquad [x < -4 \ \vee \ -1 < x < 0 \ \vee \ x > 0]$

Esercizio 2. Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni:

(i) $\begin{cases} x^2 - 6x + 12 > 0 \\ \dfrac{x^2 - x}{x^2+1} < 0. \end{cases}$ $\qquad [0 < x < 1]$

(ii) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{5-x} \geqslant 0 \\ \dfrac{x}{x-1} > 0. \end{cases}$ $\qquad [1 < x < 5]$

Esercizio 3. Spiegare perché la seguente equazione è impossibile:

$$\frac{1}{1+|x|} = \frac{-2}{|x+1|}.$$

Esercizio 4. Risolvere le seguenti equazioni

(i) $\dfrac{2-x}{|2x+1|} = \dfrac{5}{3}.$ $\qquad [x = -\frac{11}{7}, \ \frac{1}{13}]$

(ii) $|1 + |2x-1| - x| = 3.$ $\qquad [x = -\frac{1}{3}, \ 3]$

Esercizio 5. Risolvere le seguenti disequazioni

(i) $\left|\dfrac{x+|x|}{x-1}\right| < 1$ $\qquad [x < \frac{1}{3}]$

(ii) $\dfrac{|x-2|}{x} > \dfrac{x-4}{|x-2|+1}.$ $\qquad [x > 0]$

(iii) $\dfrac{3+|2-x|}{5} + \dfrac{1}{2|x|} > 1$ $\qquad [x < 0 \ \vee \ 0 < x < \sqrt{\frac{5}{2}} \ \vee \ x > \frac{4+\sqrt{6}}{2}]$

(iv) $\dfrac{|x-2|}{x} > \dfrac{x-4}{|x-2|+1}.$ $\qquad [x > 0]$

(v) $\dfrac{1}{|1+x|} - |3+x| \geqslant 0.$ $\qquad [-2-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant -2+\sqrt{2} \text{ con } x \neq 1]$

Esercizio 6. Risolvere le seguenti disequazioni

(i) $\sqrt{3-2x} < \sqrt{3+2x}.$ $\qquad [0 < x \leqslant \frac{3}{2}]$

(ii) $\sqrt{4x^2+3x-1}+3-2x>0.$ $\quad[\,x \leqslant -1 \;\vee\; x \geqslant \frac{1}{4}\,]$

(iii) $1+2x>\sqrt{4x^2-5x+1}.$ $\quad[\,0<x\leqslant \frac{1}{4} \;\vee\; x\geqslant 1\,]$

(iv) $\sqrt{2x-2}-\sqrt{x}<\sqrt{2+x}.$ $\quad[\,x>1\,]$

(v) $\sqrt{|x-2|-1}>\sqrt{6-|x|}.$ $\quad[\,-6\leqslant x<-\frac{5}{2} \;\vee\; \frac{9}{2}<x\leqslant 6\,]$

Esercizio 7. Risolvere le seguenti equazioni:

(i) $3\cdot 2^x+2^{x+3}-2^{x-1}-5\cdot 2^{x+1}=\sqrt{2}$ $\quad[\,x=\frac{3}{2}\,]$

(ii) $3^x-3^{x-2}=2^x+2^{x+1}$ $\quad[\,3\,]$

(iii) $\dfrac{3^{2x}+2\cdot 3^x+1}{3^{x+2}-3^x}=\dfrac{2}{3}$ $\quad[\pm 1\,]$

Esercizio 8. Risolvere le seguenti disequazioni:

(i) $2^x+2^{x-1}+2^{x-2}<7$ $\quad[\,x<2\,]$

(ii) $3^{x^2+2x}\geqslant 1$ $\quad[\,x\leqslant -2 \;\vee\; x\geqslant 0\,]$

(iii) $|2^x-4|<4$ $\quad[\,x<3\,]$

(iv) $8\left(\dfrac{1}{4}\right)^x-6\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+1>0$ $\quad[\,x<1 \;\vee\; x>2\,]$

(v) $4^x+1>\sqrt{16^x+2}$ $\quad[\,x>-\frac{1}{2}\,]$

Esercizio 9. Risolvere le seguenti equazioni:

(i) $3^x+5\cdot 3^{x+1}=2^{2x-1}$ $\quad[\frac{5\log 2}{2\log 2-\log 3}\,]$

(ii) $2\log x-\log(x-1)=2\log 2$ $\quad[\,2\,]$

(iii) $\log_2^2 x+\log_2 x-2=0$ $\quad[\,2,\ \frac{1}{4}\,]$

(iv) $\log(3x-8)+\log(x-3)=\log 2$ $\quad[\,\frac{11}{3}\,]$

Esercizio 10. Risolvere le seguenti disequazioni:

(i) $\log_{\frac{3}{4}}(3-x)<1$ $\quad[\,x<\frac{9}{4}\,]$

(ii) $\log_3(\log_3(2x-5))<0$ $\quad[\,3<x<4\,]$

(iii) $\log_{\frac{1}{3}}^2 x+\log_{\frac{1}{3}} x-2\leqslant 0$ $\quad[\,\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 9\,]$

Esercizio 11. Risolvere le seguenti equazioni:

(i) $\cos 2x+\cos x-\sin x=0$

[Usando le formule di duplicazione del coseno, l'equazione diventa: $\cos^2 x-\sin^2 x+\cos x-\sin x=0$. Decomponendo la prima differenza di quadrati, si ottiene $(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x+1)=0$. Annullati i fattori, si ottengono le soluzioni: $\frac{\pi}{4}+k\pi,\ \ \frac{3}{2}\pi+2k\pi,\ \pi+2k\pi$]

(ii) $2\sin^2 x=3\cos x$ $\quad[\,\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\,]$

(iii) $2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^2 x=2$ $\quad[\,\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{3}+k\pi\,]$

(iv) $2\cos x-3\sin x=2$ $\quad[\,2k\pi,\ \ldots\,]$

Esercizio 12. Risolvere le seguenti disequazioni:

(i) $2\cos x - 1 < 0$ $\qquad [\,\frac{\pi}{3} + 3k\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\,]$

(ii) $|\sin x| > \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad [\,\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + k\pi\,]$

(iii) $\sin x(2\cos x - 1) > 0$ $\qquad [\,2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi; \quad \pi + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\,]$

(iv) $\dfrac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x} < 0$ $\qquad [\,k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi\,]$

Esercizio 13. Scrivere gli insiemi delle soluzioni delle precedenti disequazioni sotto forma di intervalli di $\mathbb{R}$.

Esercizio 14. Trovare, se esistono, il massimo, il minimo, l'estremo superiore e l'estremo inferiore degli insiemi delle soluzioni delle disequazioni dei precedenti esercizi.