Sapienza Università di Roma - Facoltà I3S
Corso di Laurea in Statistica Economia Finanza e Assicurazioni
Corso di Laurea in Statistica Economia e Società
Corso di Laurea in Statistica gestionale
Matematica II corso - A.A. 2017-2018 – prof. Cigliola
Foglio n.3 – Topologia di $\mathbb{R}$

Esercizio 1. Per ciascuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ determinare la parte interna, la parte esterna, la frontiera, i punti di accumulazione e i punti isolati:

(i) $A = \{0\} \cup (1,3] \cup \{4\}$

[$Int(A) = (1,3)$;
$Est(A) = (-\infty,0) \cup (0,1) \cup (3,4) \cup (4,+\infty)$;
$\partial A = \{0,1,3,4\}$;
punti di accumulazione di A sono dati da $[1,3]$;
i punti isolati di A sono $\{0,4\}$]

(ii) $A = (-\infty,-3) \cup [1,3) \cup \{5,6,7\}$

(iii) $A = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$

[L'insieme è costituito dai numeri naturali pari. Tutti i suoi punti sono isolati, ha parte interna vuota, la sua parte esterna coincide con il suo complementare. Non ha punti di accumulazione.]

(iv) $A = \left\{\frac{1}{n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$

[I punti di A sono tutti isolati;
$Int(A) = \emptyset$;
$Est(A) = \mathbb{R} \setminus A \setminus \{0\}$;
$\partial A = A \cup \{0\}$;
0 è l'unico punto di accumulazione per A]

(v) $A = \mathbb{N} \cup \left\{\frac{1}{n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$

[La parte interna di A è vuota perché esso è costituito da soli punti isolati e non può contenere interi segmenti di numeri reali;
la parte esterna è il suo complementare $\mathbb{R} \setminus A$;
la sua frontiera è A stesso;
l'unico suo punto di accumulazione è 0.]

(vi) $A = \left\{(-1)^n \cdot \frac{n}{n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$

[Si badi che l'insieme ha due punti di accumulazione -1 e 1. Tutti i suoi elementi sono dei punti isolati.]

(vii) $A = [-1,\ 1] \setminus \left\{(-1)^n \cdot \frac{n}{n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$

(viii) $A = \cdots \cup (-3,-2) \cup (-2,-1) \cup (-1,0) \cup (0,1) \cup (1,2) \cup \dots$

(ix) $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$.