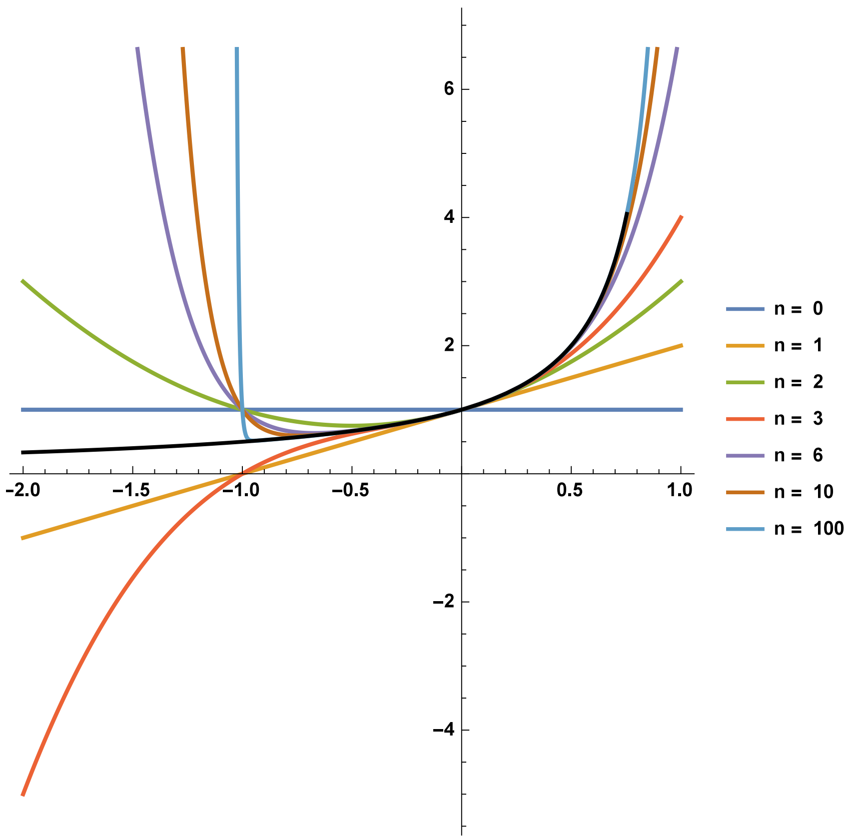
Sapienza Università di Roma - Corso di Laurea in Ingegneria Energetica
Analisi Matematica II - A.A. 2016-2017 – prof. Cigliola
Foglio n.2 – Serie di funzioni

Esercizio 1. Calcolare, se possibile, la somma delle seguenti serie di funzioni specificando in quale sottoinsieme di $\mathbb{R}$ essa è definita:

(i) $\sum_{n\geqslant 0} x^n$

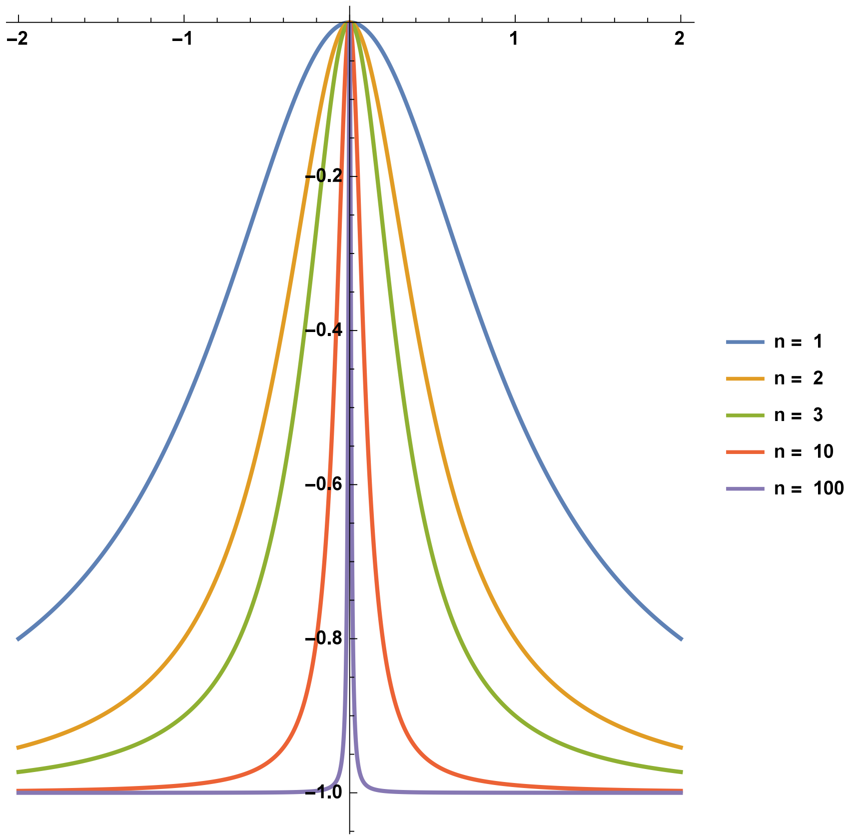
[È ben noto che la serie geometrica converge se e solo se $|x| < 1$ e che ha per somma la funzione $S(x) = \frac{1}{1-x}$. Nel grafico seguente abbiamo il grafico dei termini della successione delle somme parziali n-sime per $n = 0, 1, 2, 3, 6, 10, 100$ ed in nero la funzione somma S.



Si osservi che per valori positivi di x la convergenza è più veloce che per quelli negativi.]

(ii) $\sum_{n\geqslant 1} \left[\frac{1}{n^2x^2+1} - \frac{1}{(n-1)^2x^2+1} \right]$

[Per $x = 0$ la serie converge a 0 poiché ha termine generale costantemente nullo. Per $x \neq 0$, la serie è telescopica. La somma parziale n-sima è data da $s_n(x) = \frac{1}{n^2x^2+1} - 1$ che converge a -1 per $n \to +\infty$. La serie ha quindi come la funzione discontinua $S(x) = \begin{cases} -1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$ La serie non converge quindi né uniformemente né totalmente su $\mathbb{R}$. Il grafico riassume il comportamento della serie:

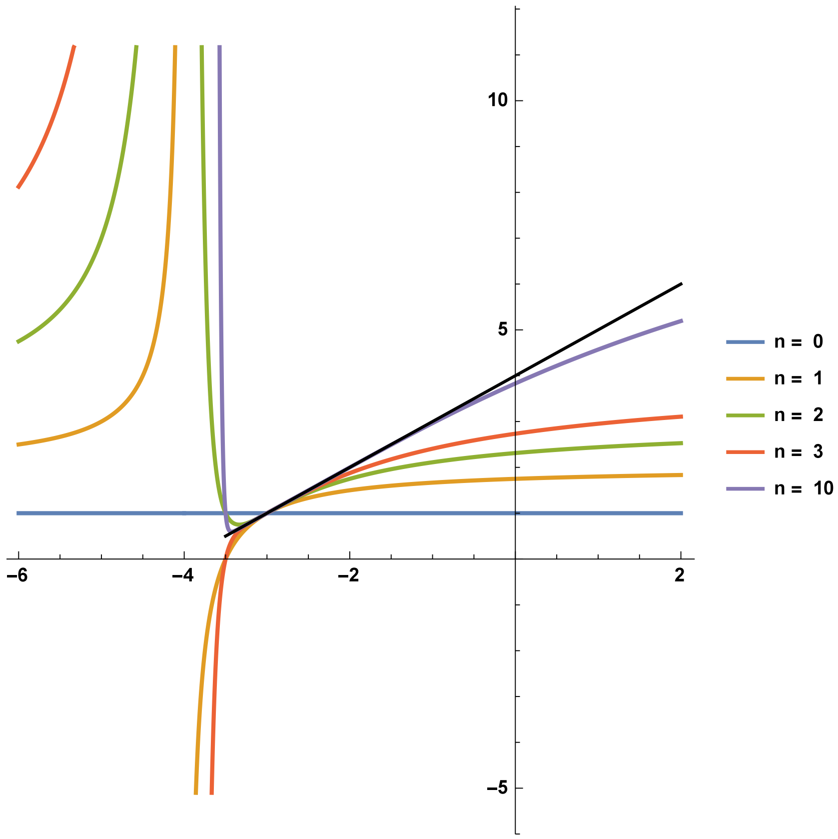


]

(iii) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\left[\cos\frac{\pi x}{(n-1)^3}-\cos\frac{\pi x}{n^3}\right]$ $\quad$ [$S(x)=\cos\pi x-1$]

(iv) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{x+3}{x+4}\right)^n$

[Si tratta di una serie geometrica. Essa converge se e solo se $\left|\frac{x+3}{x+4}\right|<1$, ovvero $x>-\frac{7}{2}$. La funzione somma è $S(x)=\frac{1}{1-\frac{x+3}{x+4}}=x+4$. Graficamente si ha:



]

(v) $\sum\limits_{n\geqslant 0} e^{-n(x^2-1)}$

[La serie può essere riscritta come $\sum\limits_{n\geqslant 0}(e^{-(x^2-1)})^n$. Si tratta di una serie geometrica di ragione e^{1-x^2}. Essa converge se e solo se $|e^{1-x^2}| < 1$, ovvero se $x < -1$ oppure $x > 1$. La somma è $S(x) = \frac{1}{1-e^{1-x^2}}$.]

Esercizio 2. Studiare la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale delle seguenti serie di funzioni:

(i) $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n$

[È ben noto che la serie geometrica converge assolutamente, quindi puntualmente se e solo se $x \in I = (-1,1)$. Per studiare l'uniforme e la totale convergenza procediamo come segue. Osserviamo che $\sup_{x\in I}\{|x^n|\} = 1$, quindi non sipuò maggiorare la serie data con una serie numerica convergente. Pertanto non abbiamo convergenza totale su I. Se prendiamo però insiemi di tipo $I_a = (-a,a)$, con $0 < a < 1$, abbiamo che $\sup_{x\in I_a}\{|x^n|\} = a^n$. Ricordando che $\sum a^n$ è convergente, su I_a abbiamo convergenza totale e uniforme.]

(ii) $\sum\limits_{n\geqslant 0} \sqrt{n}x^{-n}$

[Il termine generale è definito per $x \neq 0$. Fissato x, usando il criterio della radice abbiamo che $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sqrt{n}\left(\frac{1}{x}\right)^n} = \left|\frac{1}{x}\right|$. Quindi la serie converge per $\left|\frac{1}{x}\right| < 1$, ovvero $|x| > 1$ e diverge per $|x| < 1$ e $x \neq 0$. Per $|x| = 1$ si ottiene la serie numerica $\sum_{n\geqslant 0}\sqrt{n}$ che diverge positivamente. Concludendo, la serie converge puntualmente e assolutamente su $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. Osserviamo che per ogni $x\in I_a=(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)$, con $a>1$, abbiamo che $|f_n(x)|\leqslant\sqrt{n}\frac{1}{a^n}$. Siccome la serie numerica $\sum\sqrt{n}\frac{1}{a^n}$ è convergente, allora la serie data converge totalmente ed uniformemente su I_a.]

(iii) $\sum_{n\geqslant 0} 2^{-n}\sin nx^2$

[Si osserva subito che per ogni x reale, $|f_n(x)|\leqslant\frac{1}{2^n}$. Poiché la serie geometrica $\sum\frac{1}{2^n}$ è convergente, la serie data converge totalmente, uniformemente, assolutamente e puntualmente su $\mathbb{R}$.]

(iv) $\sum_{n\geqslant 1} x^{\sqrt{n}}$

[La serie converge assolutamente e puntualmente su $I=(-1,1)$, converge totalmente e uniformemente sui compatti contenuti in I.]

(v) $\sum_{n\geqslant 0} x^n\, n^x$

[Per $x=0$ la serie converge a 0. Per $x>0$, si studi la convergenza puntuale usando il criterio della radice. Per $x<0$ si ottiene una serie a segno alterno. Si trova che la serie converge assolutamente in $(-1,1)$, converge puntualmente in $[-1,1)$, converge totalmente ed uniformemente sui compatti $[-a,a]\subset(-1,1)$.]

(vi) $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n}{n^x}$

[Osserviamo che se $x=0$ la serie è indeterminata. Per $x\neq 0$, vogliamo utilizzare il criterio di Leibniz. Osserviamo che il termine $\frac{1}{n^x}=\left(\frac{1}{n}\right)^x$ è decrescente ed infinitesimo rispetto ad n se $x>1$. Allora la serie converge puntualmente. Se poi $x>1$, la serie converge anche assolutamente; se invece è $0<x\leqslant 1$ la serie dei valori assoluti diverge positivamente (si ottiene una serie di tipo armonico). Se $x<0$, la serie diventa $\sum n^{|x|}$ la quale diverge poiché ha termine generale non infinitesimo. Abbiamo quindi convergenza puntuale su $I=(0,+\infty)$ e assoluta su $J=(1,+\infty)$. Per studiare la convergenza uniforme ci viene in aiuto la stima dell'errore data dal criterio di Leibniz. Se $s_n(x)$ è la funzione somma parziale n-sima ed S è la funzione somma della serie che stiamo analizzando, abbiamo che, per ogni $x\in I$ e, $|s_n(x)-S(x)|\leqslant\frac{1}{(n+1)^x}$. Per poter maggiorare tale errore con una quantità infinitesima uniformemente rispetto ad x, conviene restringersi a insiemi di tipo $I_a=(a,+\infty)$, con $a>0$. Siccome $\sup_{I_a}\{|s_n(x)-S(x)|\}\leqslant\sup_{I_a}\{\dfrac{1}{(n+1)^x}\}=\dfrac{1}{(n+1)^a}\to 0$, per $n\to+\infty$, la serie converge uniformemente su I_a. Si può avere convergenza totale solo su sottoinsiemi di J, perché qui abbiamo convergenza assoluta. Osserviamo che la generica funzione $f_n(x)$ è decrescente su J ed ha quindi $\sup_{x\in J}\{f_n(x)\}=\frac{1}{n}$. Poiché la serie $\sum\frac{1}{n}$ è divergente, non possiamo trovare alcuna serie numerica convergente che la maggiori (per il criterio del confronto). Allora la serie data non converge totalmente su J. Se consideriamo invece intervalli di tipo $(b,+\infty)$, con $b>1$, abbiamo convergenza totale.]

(vii) $\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{(x+n)^n}{n!}$ [La serie non converge in alcun punto di $\mathbb{R}$.]

(viii) $\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{x^n}{x^{2n}+1}$ sull'insieme $[0,1]$.

[Si osservi che la serie è ben definita sull'intervallo I ed è a termini positivi. Per $x = 0$ converge a 0. Per $x = 1$ invece diverge positivamente. Se si osserva che $\frac{x^n}{x^{2n}+1} \leqslant x^n$, su può dedurre con il criterio del confronto che a serie converge puntualmente (ed assolutamente) su $I = [0,1)$. Poiché $f_n'(x) = -\frac{nx^{n-1}(x^{2n}-1)}{(x^{2n}+1)^2}$, abbiamo che le f_n sono crescenti su I. Esse assumono il loro valore massimo per $x = 1$ che è $f_n(1) = \frac{1}{2}$. Per poter avere convergenza totale dobbiamo restringerci allora a sottoinsiemi di tipo $[0,a]$, con $0 < a < 1$.]

Esercizio 3. Sia data la funzione f definita come

$$f(x) = \sum_{n\geqslant 1} e^{-n} \arctan(nx), \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Calcolare, se esiste, $f'(0)$.

[Applichiamo il teorema di derivazione termine a termine per le serie. Osserviamo che la serie data converge a 0 per $x = 0$. La serie derivata è $\sum_{n\geqslant 1} n\, e^{-n} \frac{1}{n^2x^2+1}$. Osserviamo che $n\, e^{-n} \frac{1}{n^2x^2+1} \leqslant \frac{n}{e^n}$, allora la serie derivata converge totalmente in $\mathbb{R}$. Ne deduciamo che la serie di partenza converge uniformemente su $\mathbb{R}$ e che la serie derivata converge ad $f'(x)$. Quindi $f'(0) = \sum_{n\geqslant 1} n\, e^{-n}$. Per calcolare tale somma procediamo come segue. Introduciamo la serie geometrica convergente (uniformemente in un intorno di 1) $g(x) = \sum_{n\geqslant 0} e^{-nx}$. La sua serie derivata è $g'(x) = \sum_{n\geqslant 0} -ne^{-nx}$, convergente anch'essa uniformemente in un intorno di $x = 1$. Osserviamo che $f'(0) = g'(1)$. Siccome $g(x) = \frac{1}{1-e^{-x}}$ e $g'(x) = \frac{-e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$, abbiamo che $f'(0) = -\frac{e^{-1}}{(1-e^{-1})^2} = -\frac{-e}{(e-1)^2}$.]

Esercizio 4. Calcolare

$$\int_2^3 \sum_{n\geqslant 1} (n-1)x \left(\frac{1}{x^2+1}\right)^n dx.$$

[La serie che vogliamo integrare può essere riscritta come $x \sum_{n\geqslant 1} (n-1) \left(\frac{1}{x^2+1}\right)^n$, tirando fuori il termine x dalla somma poiché non dipende dall'indice di addizione n. Nell'intervallo $[2,3]$ la serie converge totalmente; infatti $(n-1)\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^n \leqslant \frac{n-1}{5^n}$. Allora è possibile integrare la serie termine a termine. Si ha che

$$\int_2^3 \sum_{n\geqslant 1} (n-1)x \left(\frac{1}{x^2+1}\right)^n dx = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2}(n-1) \int_2^3 2x(x^2+1)^{-n} =$$

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2}(n-1) \frac{1}{-n+1} \left[\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{n-1}\right]_2^3 = -\frac{1}{2} \sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{10}\right)^n + \frac{1}{2} \sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{72}.]$$

Esercizio 5. Provare che la serie di funzioni $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ converge uniformemente ma non totalmente nell'intervallo $[0,1]$.